Affine Abbildungen

Einführung

1

Datei Nr. 21201

Stand 6. März 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Inhalt

0 Grundlage – Der affine Raum

Die Mathematik sollte als exakte Wissenschaft zu Beginn ein es Themas klären, welche Voraussetzungen notwendig sind, und welche Grundlagen benötigt werden:

Wenn man **mit Punkten und Vektoren rechnen** will, sollte zuvor das Ganze in ein klares System gebracht werden, in dem die Zusammenhänge und Grundregeln festgelegt sind. Dieses System heißt **affiner Raum**.

Dazu benötigen wir dreierlei Mengen:

Das Fundament ist eine Menge ***M***, die nicht leer sein darf, und deren Elemente man **Punkte** nennt. Dann benötigen wir einen **Vektorraum *V***, dessen Elemente (die Vektoren) aus der **Menge** $\mathbb{R}$ **der reellen Zahlen** gebildet werden.

Diese Mengen werden nun so verknüpft:

Jedem Paar A,B von Punkten kann man einen Vektor zuordnen, den man so schreibt: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}$. Damit wird gesichert, dass wir im Punktraum ***M*** mit Vektoren arbeiten können. Dabei müssen folgende Regeln gelten:

A1: Für jeweils drei Punkte A, B und C aus ***M*** gilt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

A2: Zu jedem Punkt $A \in \boldsymbol{M}$ und jedem Vektor $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt B, so dass gilt: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Aus diesen Regeln folgt, dass man so im „Affinen Raum“ arbeiten kann, wie man es in der Schule bzw. Hochschule lernt. Man kann also die Lage von Punkten durch Vektoren beschreiben, indem man ein Koordinatensystem verwendet. Dieses besteht aus einem Ursprung und je nach Art des Raumes aus zwei oder drei Basisvektoren. Dann kann man Teilmengen des affinen Raumes wie Geraden und Ebenen festlegen usw.

Es sei extra darauf hingewiesen, dass metrische Begriffe wie Länge, Winkel, Flächen- und Rauminhalt damit noch nicht behandelt werden können. Denn dazu benötigt man weitere Definitionen, die dann Teilmengen wie Strecken eine Länge zuordnen usw. Man definiert also ein Skalarprodukt von Vektoren, indem man jedem Paar von Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Dann spricht man von einem **metrischen Raum**.

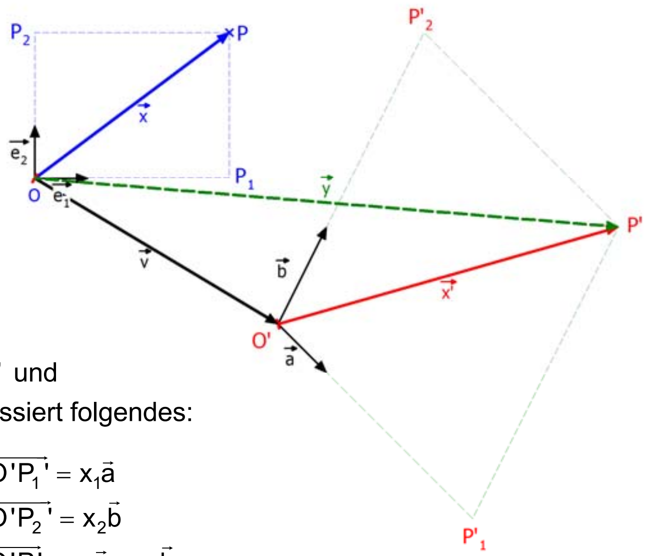
Die Theorie der affinen Abbildungen beschäftigt sich damit, wie man Punkten des affinen Raumes andere Punkte zuordnen kann. Dies kann so geschehen, dass man jedem Punkt, der durch seine Koordinaten gegeben ist, einen anderen Punkt zuordnet. Dies machen wir im Abschnitt 2.

1 Affine Punktabbildungen

1.1 Die Allgemeine Abbildungsgleichung.

Eine affine Abbildung ist eine Abbildung des affinen Raums (hier der Zeichenebene) auf sich.

Diese Abbildung kann man als Übergang von einem Koordinatensystem auf ein anderes beschreiben.



Das gegebene Koordinatensystem verwende wie üblich die Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.
Dann kann man einen beliebigen Punkt P so durch seinen Ortsvektor darstellen:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ihm ordnet man einen Bildpunkt zu und zwar so, dass er einfach in einem neuen Koordinatensystem dieselben Koordinaten bekommt.

Das Bild-Koordinatensystem hat seinen Ursprung O' und die Basisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bei dieser Zuordnung passiert folgendes:

Aus	$\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{e}_1$	wird	$\overrightarrow{O'P_1'} = x_1\vec{a}$
und aus	$\overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{e}_2$	wird	$\overrightarrow{O'P_2'} = x_2\vec{b}$
und aus	$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$	wird	$\overrightarrow{O'P'} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}$

Zur Erreichbarkeit der neuen Lage von O aus benötigt man dann einen Vektor $\vec{v}$, der die Lage des neuen Ursprungs angibt: $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$

Da man dann noch den Bildpunkt im alten Koordinatensystem erreichen will, nennt man darin den Ortsvektor des Bildpunktes entweder $\vec{y}$ wie in der Darstellung beschriftet, oder $\vec{x}'$

Die affine Abbildung sieht dann so aus: $P \to P'$.

Vektoriell für die Ortsvektoren: $\vec{x} \to \overrightarrow{OP'} = \vec{x}'$ mit $\overrightarrow{x'} = \underbrace{x\vec{a} + y\vec{b}}_{\overrightarrow{O'P'}} + \vec{v}$

Hinweis 1: Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Basisvektoren sind, müssen sie natürlich linear unabhängig sein.
Sie dürfen also keine Vielfachen voneinander sein. Im unserem zweidimensionalen Fall ist das gleichbedeutend damit, dass ihre Determinante ungleich Null ist:

$$\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Wäre aber $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, dann wäre $\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot ka_2 - a_2 \cdot ka_1 = 0$.

In einer gegeben affinen Abbildung muss also immer $\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) \neq 0$ sein.

Hinweis 2: *Die Art der Bezeichnungen ist nicht festgelegt.* Manche nummerieren die Basisvektoren und verwenden $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$. In der Schule nimmt man häufiger $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Die Punktkoordinaten können x und y sein, oder x_1 und x_2.
Bildpunkte kann man mit Querstrich bezeichnen: $\overline{P}$ oder so P' oder P'' oder P^*.
Auch ich werde nicht einheitlich arbeiten, damit man nicht auf eine bestimmte Schreibweise fixiert ist sondern sich informiert, was gemeint ist.
Schreibtechnisch ist für mich diese Version günstig: $\vec{x}' = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{v}$

Beispiel: Eine Abbildung ohne Verschiebungsvektor $\vec{c}$:

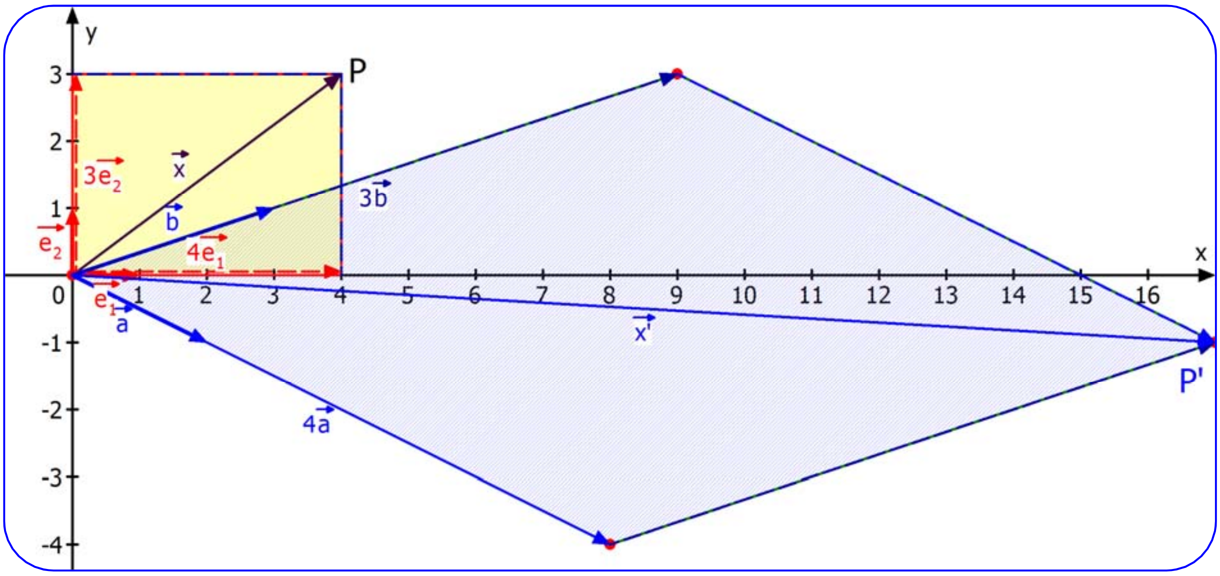
Gegeben sei die Abbildung α durch $\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Ohne Verschiebungsvektor ist der Ursprung ein Fixpunkt, d.h. er wird auf sich selbst abgebildet.

Ortsvektor des Punktes $P(4\,|\,3)$: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \boxed{4}\cdot\vec{e}_1 + \boxed{3}\cdot\vec{e}_2 = \boxed{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Berechnung des Bildpunktes zu $P(4\,|\,3)$: $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OP'} = \boxed{4}\cdot\vec{a} + \boxed{3}\cdot\vec{b} = \boxed{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \boxed{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\-1\end{pmatrix}$

$P(4\,|\,3)$ wird abgebildet auf $P'(17\,|\,-1)$ (Das sind die Bildkoordinaten im gegebenen System.)



Aus dem gelb gefärbten Rechteck im Basissystem $\{O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\}$ wird das blaue Parallelogramm im Bildsystem $\{O\,;\vec{a}\,;\vec{b}\,\}$.

Der einzige Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, also ein Fixpunkt ist, ist der Ursprung, wie folgende Rechnung zeigt:

Fixpunktbedingung: $\vec{x}\,' = \vec{x}$ d. h. $\vec{x} = x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{matrix} x = 2x + 3y \\ y = x - y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 0 = x + 3y \\ 0 = x - 2y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Rechnet man (1) – (2), dann erhält man $0 = 5y \Rightarrow y = 0$.
Aus (1) folgt dann $x = 0$. Also ist $O(0\,|\,0)$ der einzige Fixpunkt.

Eine affine Abbildung mit nur einem Fixpunkt heißt ***Affine Drehstreckung***.
Diesen Namen kann man gut nachvollziehen: Zuerst dreht man das gelbe Rechteck um den Ursprung, so dass der Pfeil $\overrightarrow{OP}$ auf den Pfeil $\overrightarrow{OP'}$ zu liegen kommt, und dann streckt man das Rechteck in genau dieser Richtung rechts, wodurch das blaue Parallelogramm entsteht.

1.2 Abbildungsgleichungen mit Matrizen

Eine Abbildungsgleichung dient der Berechnung von Bildpunkten.

Die Definition für eine affine Abbildung lautet: $\vec{x}' = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$ mit $\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.

Ausführlichere vektorielle Schreibweise : $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Daraus kann man die sogenannte **Matrixform** bilden: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Dies stellt eine Abkürzung dar. Man schreibt die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ als Spaltenvektoren in die sogenannte Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ und definiert die

Multiplikation aus Matrix und Vektor so, dass man dasselbe Ergebnis erhält:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}}$$

Merkregel: *Das entspricht zwei Skalarprodukten zwischen dem oberen Zeilenvektor der Matrix und dem Vektor $\vec{x}$ und dann zwischen dem unteren Zeilenvektor der Matrix und $\vec{x}$. Verwirrend? Man merkt sich einfach: "Zeile mal Spalte".*

Zahlenbeispiele: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-9 \\ 14+45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 59 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0 \\ 0+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verhält sich bei der Multiplikation mit einem Vektor neutral, vergleichbar mit der Zahl 1 bei der Multiplikation mit anderen Zahlen. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ heißt **Einheitsmatrix.**

Verwendet man als Abkürzung $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, dann kann man eine affine Punktabbildung auch so beschreiben: $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{c}$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix ist, welche die beiden Basisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ enthält, und deren Determinante nicht Null sein darf.

Aufgabe 1: Berechne

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} t+1 & 2t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ergebnisse: a) $\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14-6\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8-3\\-2+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\16\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}t+1&2t\\-t&1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+2-2t\\-2t-1+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-t-1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+6\\-12+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0&0\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-8\\6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0\\-3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}2&\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{8}-2\\\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sqrt{2}-2\\2\end{pmatrix}$

Nun die Abbildung eines Dreiecks

Die Abbildung α ist gegeben durch $\vec{x}'=x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

oder in Matrizenschreibweise: $\vec{x}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\vec{x}$

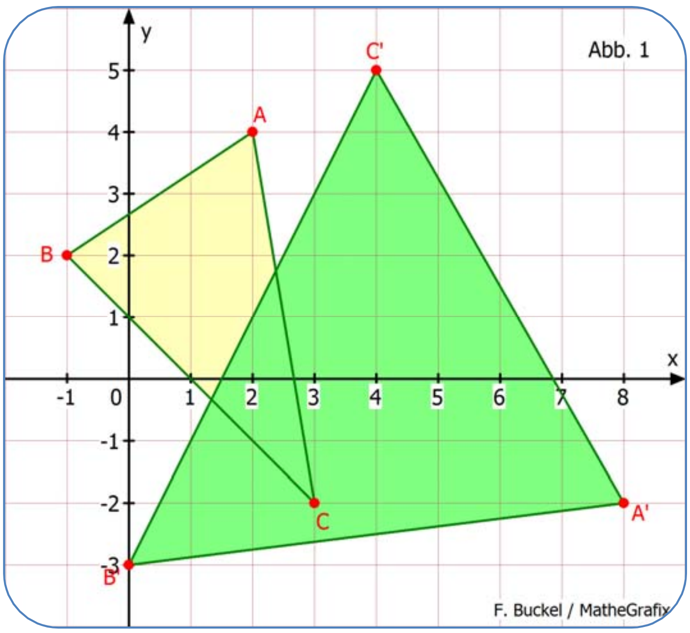
Wir bilden dieses Dreieck ab: $A(2\,|\,4), B(-1\,|\,2), C(3\,|\,-2)$.

Berechnung der Bildpunkte:

$\vec{a}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow$ $A'(8\,|\,-2)$

$\vec{b}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow$ $B'(0\,|\,-3)$

$\vec{c}'=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\Rightarrow$ $C'(4\,|\,5)$



1.3 Einige spezielle Abbildungen

Bei Verwendung der Einheitsbasis $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kann man einen Vektor als Linearkombination

darstellen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

Oder $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = -2\vec{e}_1 + [0\vec{e}_2]$

Oder allgemein: $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$

Oder so: $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Abbildungen mit ganz einfachen Abbildungsgleichungen sind:

Beispiel 1: ***Eine Verschiebung*** $\vec{x}\,' = \vec{x} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$. (1)

Ersetzt man $\vec{x}$ durch $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$: $\vec{x}\,' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

d. h.. $\vec{x} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

Vergleicht man $\vec{x}\,' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

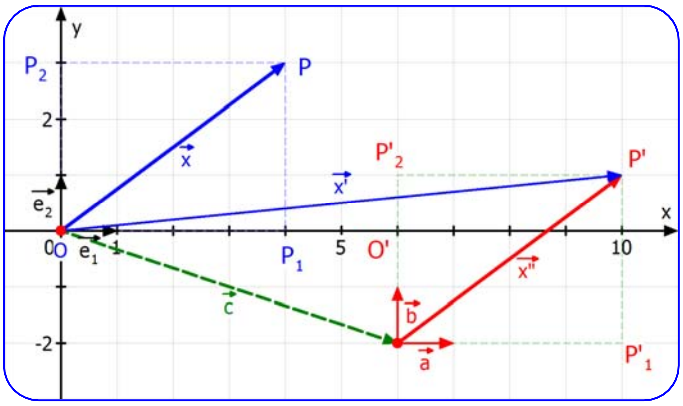
mit $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$,

dann ist hier $\vec{a} = \vec{e}_1$ und $\vec{b} = \vec{e}_2$.

Und der neue Ursprung ist $O'(6\,|\,2)$.

Die gegebene Abbildungsgleichung

$\vec{x}\,' = \vec{x} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sagt uns also, dass bei dieser Abbildung jeder Punkt durch den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ verschoben wird.

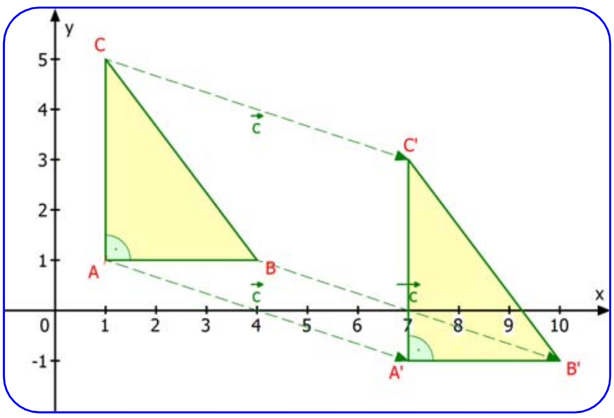


Die folgende Abbildung zeigt, wie das Dreieck $A(1\,|\,1), B(4\,|\,1), C(1\,|\,5)$ abgebildet wird.

$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow A'(7\,|\,-1)$

$\vec{b}\,' = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow B'(10\,|\,-1)$

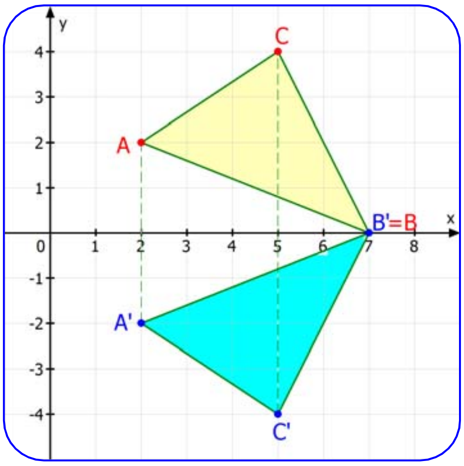
$\vec{c}\,' = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \Rightarrow C'(7\,|\,3)$



MERKE: $\boxed{\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{c}}$

stellt eine Verschiebung dar.

Beispiel 2: Spiegelung an der x-Achse:



Es gilt: x' = x und y' = -y.

Die x-Koordinate ändert sich nicht,
die y-Koordinate ändert ihr Vorzeichen.

Die Abbildungsgleichungen kann man so darstellen:

$\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = -y \end{Bmatrix}$ oder geordnet: $\begin{Bmatrix} x' = 1\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x - 1\cdot y \end{Bmatrix}$

In Vektorschreibweise: $\vec{x}' = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

In Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

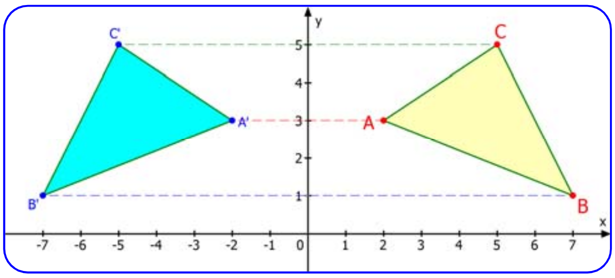
Beispiel: $C(5\,|\,4)$ soll an der x-Achse gespiegelt werden. Sein Ortsvektor ist $\vec{c} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Bildpunkt: $\vec{c}' = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$

Oder: $\vec{c}' = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot5+0\cdot4\\0\cdot5-1\cdot4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow C'(5\,|\,-4)$

B liegt auf der Spiegelachse und ist daher ein Fixpunkt: $B' = B$

Beispiel 3: Spiegelung an der y-Achse:



Es gilt: $y' = y$ und $x' = -x$

Das Vorzeichen der x-Koordinate ändert sich.
Die y-Koordinate bleibt unverändert:

$\begin{Bmatrix} x' = -x \\ y' = y \end{Bmatrix}$ oder $\begin{Bmatrix} x' = -1\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + 1\cdot y \end{Bmatrix}$

Vektorschreibweise: $\vec{x}' = x\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Beispiel: $B(7\,|\,1)$ soll an der y-Achse gespiegelt werden. Sein Ortsvektor ist $\vec{b} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$.

Bildpunkt: $\vec{b}' = 7\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$

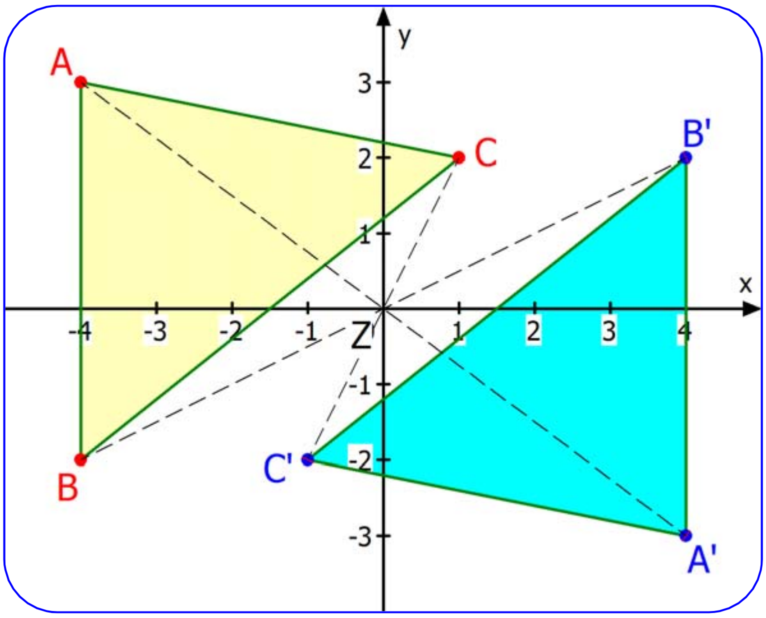
Oder: $\vec{b}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\cdot7+0\cdot1\\0\cdot7+1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix} \Rightarrow B'(-7\,|\,1)$

Weitere Beispiele

a) $(3\,|\,-5) \xrightarrow{\text{Sp.: x-Achse}} (3\,|\,5)$, b) $(-8\,|\,3) \xrightarrow{\text{Sp.: x-Achse}} (-8\,|\,-3)$

c) $(3\,|\,-5) \xrightarrow{\text{Sp.: y-Achse}} (-3\,|\,-5)$ d) $(-8\,|\,3) \xrightarrow{\text{Sp.: y-Achse}} (8\,|\,3)$.

Beispiel 4: Punktspiegelung am Ursprung



Bei einer Spiegelung am Ursprung ändern beide Koordinaten ihr Vorzeichen:

$$\left\{\begin{matrix} x' = -x \\ y' = -y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x' = -1\cdot x + 0\cdot y \\ y' = \quad 0\cdot x - 1\cdot y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Beispiel: Aus $A(-4\,|\,3)$ wird $A'(4\,|\,-3)$,

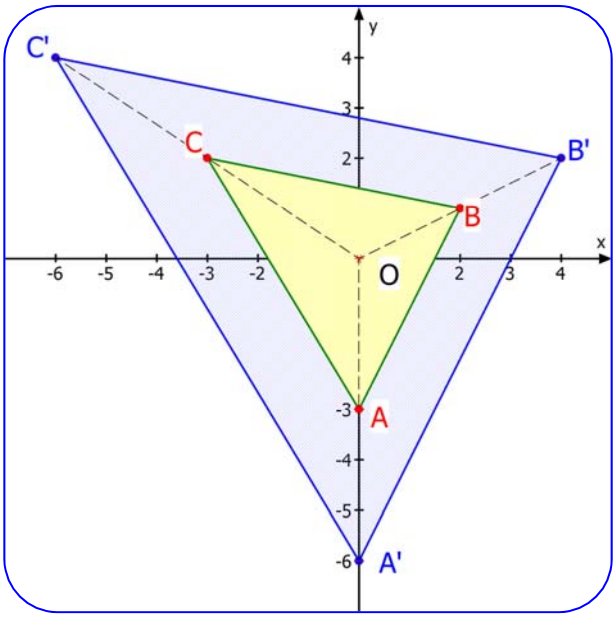
Beispiel 5: Zentrische Streckung am Ursprung

Bei dieser Abbildung werden alle Punkte vom Ursprung O aus auf die doppelte Entfernung „gestreckt“. genauer gesagt ihre Ortsvektoren:

$$\left\{\begin{matrix} x' = 2x \\ y' = 2y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \vec{x}\,' = 2\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Beispiel: Aus $B(2\,|\,1)$ wird $B'(4\,|\,2)$.

Wir können später beweisen, dass jede Strecke (Gerade) in eine parallele Strecke (Gerade) abgebildet wird.



Beispiel 6 Eine Drehung um den Ursprung um 60°

$$\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$$

(Wie man diese Abbildungsgleichungen aufstellt, folgt im letzten Abschnitt dieses Textes.
Ich zeige hier, wie man die Abbildungsgleichung untersucht.)

Der Ursprung $O(0\,|\,0)$ wird auf sich selbst abgebildet $\vec{o}' = 0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die neuen Basisvektoren sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit den Beträgen

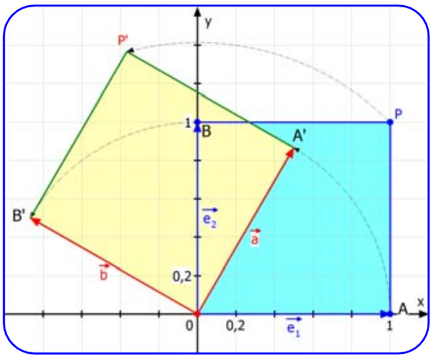
$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot 3} = \sqrt{1} = 1, \qquad \left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot 3 + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Beide Vektoren sind also Einheitsvektoren, denn sie haben den Betrag 1, ihre Pfeile haben also die Länge 1. Nun überprüfen wir mit ihrem Skalarprodukt die Orthogonalität:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} = 0$$

Das heißt, dass die Basisvektoren zueinander rechtwinklig sind. Das kann man darstellen:

Das neue Koordinatensystem $\{O' = O\,;\vec{a}\,;\vec{b}\}$, in das abgebildet wird, hat denselben Ursprung und die Basisvektoren haben den Betrag 1 und sind orthogonal. Die Graphik zeigt das aus den Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gebildete ursprüngliche **Einheitsquadrat** und das aus den Bildbasisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildete Bildquadrat. Es entsteht durch **Drehung um 60° um den Ursprung**.

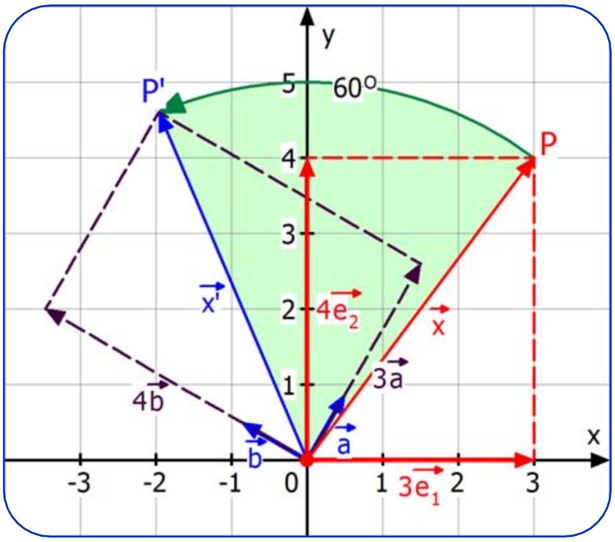


Beispiel: Drehe den Punkt $P(3\,|\,4)$ um den Ursprung um 60°.
Siehe untere Graphik!

Bildpunkt: $\vec{x}' = \boxed{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + \boxed{4} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}96 \\ 4{,}60 \end{pmatrix}$

bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}96 \\ 4{,}60 \end{pmatrix}$

Bildpunkt: $P'(-1{,}96\,|\,4{,}6)$.



Hinweis: **Drehungen** kann man so darstellen:

$$\vec{x}' = x\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} + \vec{c}.$$

Ist $\vec{c} = \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist der Ursprung ein Fixpunkt und somit das Drehzentrum!

Beispiel 7: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Drehung um den Ursprung

Untersuchung der Bild-Basisvektoren:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}} = 1 \quad \text{und} \quad |\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} = 0$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also orthogonale Einheitsvektoren. Also liegt eine Kongruenzabbildung vor.

Information: Weil $\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, kann es nur eine Drehung sein.

<u>Bestimmung des Drehwinkels:</u>

Vergleicht man die Abbildungsgleichung mit der Drehmatrix $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \vec{x}$,

dann gilt für den Drehwinkel α: $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Überlegung: Der Kosinus hat im 1. und 4. Feld positive Werte,
Der Sinus hat im 1. und 2. Feld positive Werte.
Da hier beide positiv sind, gehört der Winkel zum 1. Feld.

Aus $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ folgt dann: $\alpha = 30^{\circ}$.

Wir bilden drei Punkte ab. $A(2\,|\,-3)$, $B(5\,|\,-2)$, $C(4\,|\,1)$:

Bildpunkte:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}23 \\ -1{,}60 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A'(3{,}23\,|\,-1{,}60)$$

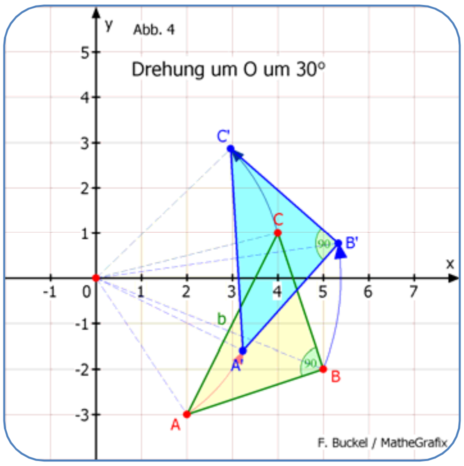
$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{3} + 1 \\ \frac{5}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}33 \\ 0{,}77 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B'(5{,}33\,|\,0{,}77)$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}87 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C'(2{,}96\,|\,2{,}87)$$

Der Ursprung wird also auf sich selbst abgebildet.
Er ist also Fixpunkt, also das Drehzentrum.

Ergebnis:

Die Abbildung dreht um den Ursprung um 30°.



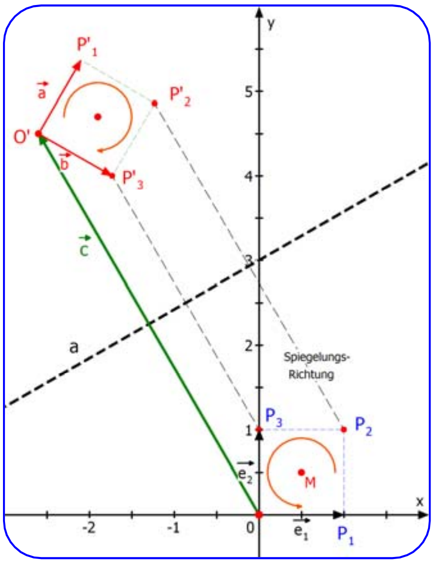
Beispiel 8: $\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\sqrt3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac12\sqrt3\\ -\frac12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac32\sqrt3\\ \frac92\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\sqrt3\\ \frac12\sqrt3 & -\frac12\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}-\frac32\sqrt3\\ \frac92\end{pmatrix}$

Vektorielle Untersuchungen: $\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\sqrt3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac12\right)^2 + \left(\frac12\sqrt3\right)^2} = \sqrt{\frac14+\frac34} = \sqrt1 = 1$

$$\left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac12\sqrt3\\ -\frac12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac12\sqrt3\right)^2 + \left(-\frac12\right)^2} = \sqrt{\frac34+\frac14} = \sqrt1 = 1$$

Beide Basisvektoren der Bildebene sind also Einheitsvektoren.

Und wegen $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\sqrt3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\sqrt3\\ -\frac12\end{pmatrix} = \frac14\sqrt3 - \frac14\sqrt3 = 0$ sie sind orthogonal.



Das Einheitsquadrat aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wird also wieder auf ein Einheitsquadrat abgebildet:
Die beiden Quadrate sind also **kongruent**.
Nur – ***der Umlaufsinn hat sich geändert***.
Also kann die zugrunde liegende Abbildung keine Drehung sein. ***Information***: Es handelt sich um eine **Spiegelung.**

Das zeigt auch $\det(A) = \begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\sqrt3\\ \frac12\sqrt3 & -\frac12\end{vmatrix} = -\frac14 - \frac34 = -1$

(Näheres dazu im Text 21200 „Kongruenzabbildungen")

Die Spiegelungsachse ist a: $y = \frac13\sqrt3\cdot x + 3$.
Ich zeige die Berechnung dazu, was im Abschnitt 4 ausführlich besprochen wird: Für Fixpunkte gilt $\vec{x}\,' = \vec{x}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\sqrt3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac12\sqrt3\\ -\frac12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac32\sqrt3\\ \frac92\end{pmatrix}$

Daraus erhält man dieses Gleichungssystem: $\left\{\begin{matrix}x = \frac12 x + \frac12\sqrt3 - \frac32\sqrt3\\ y = \frac12\sqrt3 x - \frac12 y + \frac92\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\frac12 x - \frac12\sqrt3 y + \frac32\sqrt3 = 0 \mid \cdot\sqrt3\\ -\frac12\sqrt3 x + \frac32 y - \frac92 = 0\end{matrix}\right\}$

$$\left\{\begin{matrix}\frac12\sqrt3 x - \frac32 y + \frac92 = 0\\ -\frac12\sqrt3 x + \frac32 y - \frac92 = 0\end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\ (2)\end{matrix}$$

(2) stellt dieselbe Bedingung dar wie (1).

Also sind alle Punkte, die (1) erfüllen Fixpunkte. Aus (1) erhält man $y = \frac13\sqrt3\cdot x + 3$

In der Graphik wurde die Spiegelungsrichtung dreimal eingetragen, senkrecht zur Achse a.

Zusammenfassung:

Haben bei einer affinen Abbildung mit $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$ die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Betrag 1 und sind orthogonal sind, dann wird das Einheitsquadrat auf ein anderes Einheitsquadrat abgebildet. Dann liegt eine **Kongruenzabbildung** vor.

Das kann eine **Verschiebung**, eine **Drehung** oder eine **Achsenspiegelung**. Es gibt jedoch noch eine vierte Möglichkeit: Die **Gleitspiegelung**. Diese Abbildung entsteht als Verkettung (Nacheinander-Ausführung) einer Drehung oder Verschiebung mit einer Achsenspiegelung.

Beispiel 9: : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$ Achsenspiegelung

Das ist die Gleichung aus Beispiel (8) nur ohne Verschiebungsvektor $\vec{c}$.

Abbildung des Dreiecks : $A(2|-3),\ B(5|-2),\ C(4|1)$

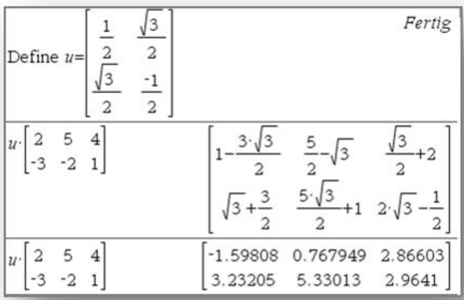
$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}60 \\ 3{,}23 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'(-1{,}60\,|\,3{,}23)$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}77 \\ 5{,}33 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B'(0{,}77\,|\,5{,}33)$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}87 \\ 2{,}96 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'(2{,}87\,|\,2{,}96)$$

Tipp: Mit Hilfe der Matrizenrechnung kann man alle Bildpunkte auf einmal berechnen:

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}+\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\sqrt{3}+1 & 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Man schreibt die Ortsvektoren von A, B und C in eine Matrix M, die man mit der Abbildungsmatrix multipliziert. Man erhält dann die Ortsvektoren aller drei Bildpunkte in der Ergebnismatrix M'. Das ist vor allem dann günstig, wenn man einen guten Rechner als Hilfsmittel hat.

In der 1. Zeile wurde die Abbildungsmatrix definiert und u genannt. In der w. Zeile wird diese mit der Matrix M der drei Ortsvektoren multipliziert. Rechts die exakten Koordinaten der Bild-Ortsvektoren.
In der 3. Zeile steht dasselbe mit Näherungswerten.

Spiegelungsachse:

Nachdem man wie in Beispiel 8 herausgefunden hat, dass eine Achsenspiegelung vorliegt, muss man die Spiegelungsachse berechnen. Sie besteht aus lauter Fixpunkte. Für sie gilt: $\vec{x}' = \vec{x}$:

Aus $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ folgt dann $\vec{x} = x\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Als Gleichungssystem geschrieben: $\begin{Bmatrix} x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y = 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{Bmatrix}$ (1) (2)

Multipliziert man (1) mit $\sqrt{3}$, folgt Gleichung (2).

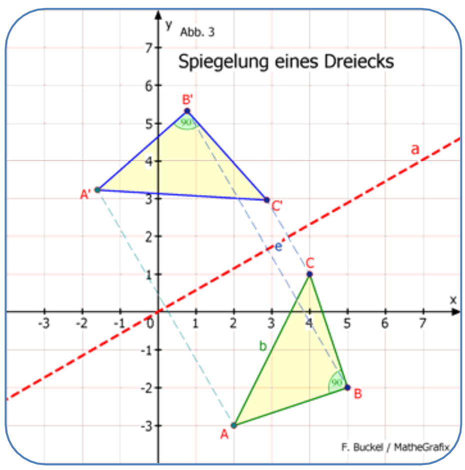
Beide Gleichungen sind also identische Bedingungen.

Also ist eine überflüssig.

Fixpunkte sind somit alle Punkte, die (1) oder (2) erfüllen.

Beides sind Geradengleichungen.

Aus (2) folgt: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x$. Das ist die Spiegelachse.



Beispiel 10

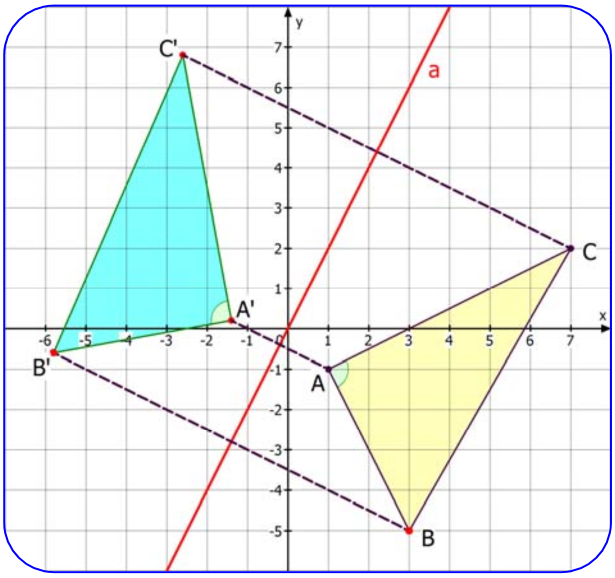
$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x}$ Achsenspiegelung an $y = 2x$

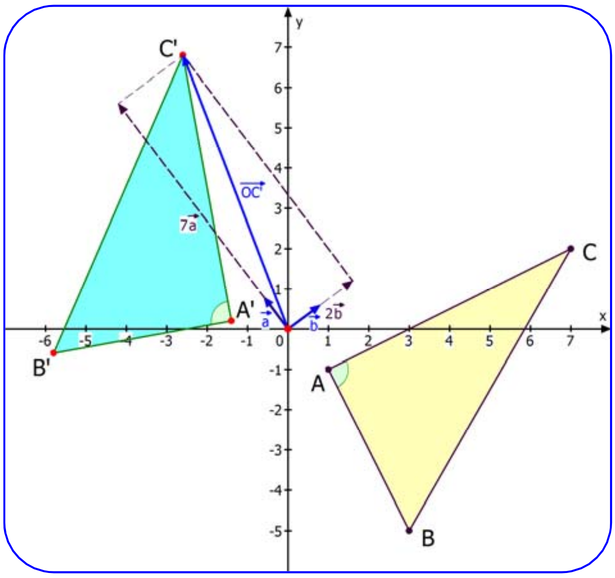
Berechne die Bildpunkte des Dreiecks $A(1|-1)$, $B(3|-5)$, $B(7|2)$ und zeichne dann die Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

$$\vec{a}_1\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6-0{,}8 \\ 0{,}8-0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-1{,}4\,|\,0{,}2)$$

$$\vec{b}\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8-4{,}0 \\ 2{,}4-3{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(-5{,}8\,|\,-0{,}6)$$

$$\vec{c}_2\,' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}2+1{,}6 \\ 5{,}6+1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ 6{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(-2{,}6\,|\,6{,}8)$$





Erklärungen: Die linke Abbildung ist entstanden, indem ich die 6 Punkte gemäß ihren Koordinaten eingezeichnet habe. Dann habe ich die Urbilder mit den Bildpunkten verbunden und habe zu diesen drei gestrichelten Strecken die gemeinsame Mittelsenkrechte a eingetragen. Jetzt erkennt man, dass es sich um eine Geradenspiegelung an a handelt.

Die rechte Abbildung zeigt am Beispiel des Bildpunktes C' von C, wie man ihn vektoriell als Linearkombination der neuen Basisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen kann:

$$\overrightarrow{OC'} = \boxed{7} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + \boxed{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

In der Abbildung erkennt man, wie der Ortsvektor $\overrightarrow{OC'}$ des Bildpunktes C' von $C(7|2)$ aus den Komponenten $7\vec{a}$ und $2\vec{b}$ erzeugt wird. Ich habe zur besseren Erkennung das Gitternetz weggelassen.

Achtung: Mit $\vec{a}\,', \vec{b}\,', \vec{c}\,'$ wurden oben die Ortsvektoren der Punkte A', B', C' bezeichnet.

Beispiel 11 $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist eine Streckspiegelung

Zuerst wird der Ursprung $O(0\,|\,0)$ nach $O'(-12\,|\,6)$ verschoben wird.

Von dort aus trägt man die Bildpunkte durch die Vektoren $\overrightarrow{O'P'} = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$ ab.

Diese Basisvektoren haben die Länge 2 (also liegt eine Streckung mit diesem Faktor vor, und sie sind orthogonal, denn $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$. Nun kommt aber noch ein ABER:

Die Determinante der Matrix ist $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$ Dieses Minuszeichen deutet darauf hin, dass der Drehsinn eines Dreiecks geändert wird, wie bei einer Geradenspiegelung.

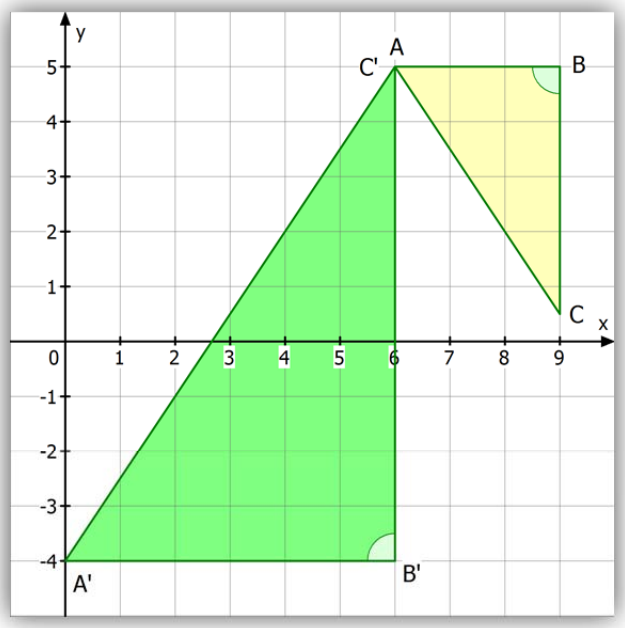
Abbildung von $A(6\,|\,5)$, $B(9\,|\,5)$, $C(9\,|\,0{,}5)$:

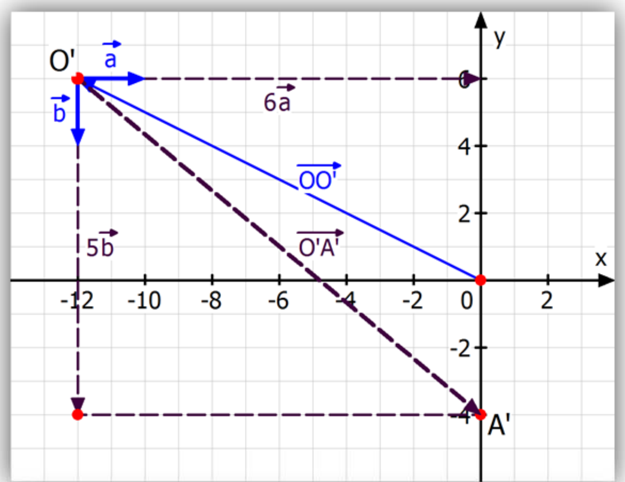
$$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ -10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0\,|\,-4)$$

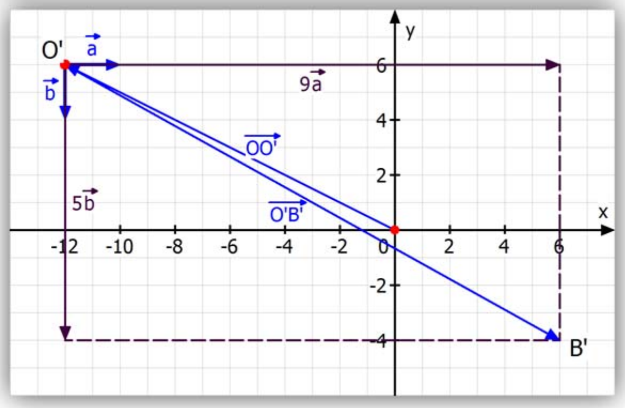
$$\vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-12 \\ -10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(6\,|\,-4)$$

$$\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-12 \\ -1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(6\,|\,5)$$

Im Text 62215 wird gezeigt, wie sich diese Abbildung aus einer zentrischen Streckung und einer Geradenspiegelung zusammensetzt.







Links wurden die Punkte gemäß ihren Koordinaten eingetragen, rechts wurden A' und B' vektoriell konstruiert durch die Basisvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ _

$$\overrightarrow{O'A'} = 6 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + 5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \quad \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} + \overrightarrow{O'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{O'B'} = 9 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + 5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \quad \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} + \overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechne die Bildpunkte des Dreiecks

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ mit $A(0\,|\,0),\ B(3\,|\,-4),\ C\left(-2\,|\,\frac{5}{2}\right)$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $A(0\,|\,0),\ B(5\,|\,-2),\ C(-5\,|\,2)$

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ mit $A(-3\,|\,-2),\ B(3\,|\,-3),\ C(0\,|\,5)$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ mit $A(4\,|\,-2),\ B\left(\sqrt{2}\,|\,-2\sqrt{2}\right),\ C(-3\,|\,5)$

Lösungen Aufgabe 2

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$

$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A'(0\,|\,0) = A \quad$ (Fixpunkt)

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B'(-1\,|\,8)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\frac{5}{2} \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C'(0{,}5\,|\,-5)$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A'(-2\,|\,4)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-6-2 \\ 10-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B'(-13\,|\,12)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6-2 \\ -10+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C'(9\,|\,-4)$

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}4-0{,}6 \\ -0{,}6-1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A'(-3\,|\,-2)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4-0{,}9 \\ 0{,}6-2{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B'(1{,}5\,|\,-1{,}5)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C'(1{,}5\,|\,3{,}5)$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(-3\sqrt{2}\,|\,-\sqrt{2}\right)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B(-3\,|\,1)$

$\vec{c}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C'\left(4\sqrt{2}\,|\,-\sqrt{2}\right)$

2 Affine Vektorabbildungen

2.1 Abbildungsgleichungen für Vektoren

Durch $\vec{x}' = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$ werden **Ortsvektoren** abgebildet,
durch $\vec{u}' = u_1\vec{a} + u_2\vec{b}$ werden **Vektoren** abgebildet.
Für die zugehörige Vektorabbildung entfällt also der „Verschiebungsvektor" $\vec{c}$.

Eine Gerade g gehe durch $P_1(1|4)$ und $P_2(6|2)$.

Daraus folgt für den Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

Nun führen wir eine beliebige affine Abbildung durch: $\vec{x}' = A\cdot\vec{x} + \vec{c}$.

Bildpunkt von P_1: $\vec{x}_1' = A\cdot\vec{x}_1 + \vec{c}$,
Bildpunkt von P_2: $\vec{x}_2' = A\cdot\vec{x}_2 + \vec{c}$

Richtungsvektor der Bildgeraden:

$$\vec{u}' = \overrightarrow{P_1'P_2'} = \vec{x}_2' - \vec{x}_1' = (A\cdot\vec{x}_2 + \vec{c}) - (A\cdot\vec{x}_1 + \vec{c}) = A\cdot\vec{x}_2 - A\cdot\vec{x}_1 = A\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = A\cdot\vec{u}$$

Ergebnis: $\vec{u}' = A\cdot\vec{u}$ (*)

Für die Vektorabbildung gilt also: $\boxed{\vec{u}' = u_1\vec{a} + u_2\vec{b}}$ (d. h. der Verschiebungsvektor $\vec{c}$ entfällt.)

Mit Zahlen: Die Abbildung sei α: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Bildpunkte: $\vec{x}_1' = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} \Rightarrow P_1'(12|1)$

$\vec{x}_2' = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-11\end{pmatrix} \Rightarrow P_2'(13|-11)$

Bildvektor: $\vec{u}' = \overrightarrow{P_1'P_2'} = \vec{x}_2' - \vec{x}_1' = \begin{pmatrix}13\\-11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}$

Zur Kontrolle berechne ich jetzt den Bildvektor mit der Abbildungsgleichung für Vektoren:

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} \rightarrow \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-4\\-10-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung:

*Ein **(Pfeilklassen-)Vektor ist eine Menge** aus unendlich vielen Pfeilen, die alle dieselbe Länge und Richtung haben. Jeder einzelne Pfeil ist also ein Repräsentant seines Vektors. Wenn man also einen Vektorpfeil verschiebt, erhält man als Bild einen anderen Pfeil der aber zum gleichen Vektor gehört. Somit ist das Bild eines Vektors (also der Pfeilmenge) bei einer Verschiebung derselbe Vektor (dieselbe Pfeilmenge).*
Mit anderen Worten: Eine Verschiebung bewirkt bei einem Vektor nichts:
Daher muss man bei einer Vektorabbildung der Verschiebungsvektor weglassen.

*Ein **Ortsvektor ist dagegen kein Vektor** im Sinne der Definition sondern nur ein einziger **Pfeil**, der im Ursprung beginnt und zu dem Punkt zeigt, dessen Ortsvektor er ist. Ortsvektoren hat man eingeführt, damit man mit ihnen rechnen kann, was bekanntlich mit Punkten nicht geht.*

2.2 Lineare Abbildungen

Es ist günstig, für Abbildungen auch eine Funktionalschreibweise zu verwenden.

Es sei α die Abbildung, die den Vektor $\vec{u}$ auf $\vec{u}'$ abbildet.

Dann schreibt man: $\vec{u}' = \alpha(\vec{u})$.

Oder mit einer Abbildungsgleichung: $\boldsymbol{\alpha(\vec{u}) = u_1\vec{a} + u_2\vec{b}}$

bzw. $\alpha(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$

Die affinen Vektorabbildungen haben zwei wichtige Eigenschaften, die helfen, Berechnungen zu vereinfachen: (Man nennt sie **Linearität.**)

L1: $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$

L2: $\alpha(k\vec{u}) = k \cdot \alpha(\vec{u})$

L1 bedeutet, dass das Bild des Summenvektors gleich der Summe der Vektorbilder ist:

Das heißt, dass es egal ist, ob man zuerst addiert und dann abbildet,

oder ob man zuerst abbildet und dann abbildet.

L2 bedeutet, dass das Bild des k-fachen Vektors gleich dem k-fachen des Bildes ist

Das heißt, dass es egal ist, ob man zuerst das k-fache berechnet und dann abbildet,

oder ob man zuerst abbildet und dann davon das k-fache berechnet.

Beispiel: Gegeben sei die Vektorabbildung: $\alpha(\vec{u}) = u_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Ich wende das *Kommutativschema* an.
(Nach rechts wird abgebildet, nach unten addiert):
Dazu untersucht man zwei verschiedene Reihenfolgen:

(1)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = -2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{v}) = 3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

$+\downarrow$ $\qquad\downarrow +$

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = 1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{9}\end{pmatrix} = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$$

Da man auf beide Arten den Ergebnisvektor $\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$ erzielt,

sind die Operationen Abbilden und Addieren vertauschbar.

(2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = -2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$$

$\cdot 4 \downarrow$ $\qquad \downarrow \cdot 4$

$$4\vec{u} = \begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(4\vec{u}) = -8\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-28}\\\mathbf{16}\end{pmatrix} = 4 \cdot \alpha(\vec{u})$$

Da man auf beide Arten den Ergebnisvektor $\begin{pmatrix}\mathbf{-28}\\\mathbf{16}\end{pmatrix}$ erzielt,

sind die Operationen Abbilden und „Vervierfachen“ vertauschbar.

Hinweis:

Bei Verwendung der Matrizenschreibweise lautet die Abbildungsgleichung der Vektorabbildung so:

$$\alpha(\vec{u}) = u_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \alpha(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\vec{u}.$$

Die Linearitätseigenschaften sehen in der Matrixschreibweise so aus:

L1: $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

L2: $A(k\vec{u}) = k\cdot(A\vec{u})$

Ich zeige das Beispiel nochmals, jetzt aber mit Matrizen:

(1)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{v}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{9}\end{pmatrix} = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$$

Da man auf beide Arten den Ergebnisvektor $\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$ erzielt,

sind die Operationen Abbilden und Addieren vertauschbar.

(2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$$

$$\cdot 4 \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot 4$$

$$4\vec{u} = \begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(4\vec{u}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-28}\\\mathbf{16}\end{pmatrix} = 4\cdot\alpha(\vec{u})$$

Da man auf beide Arten den Ergebnisvektor $\begin{pmatrix}\mathbf{-28}\\\mathbf{16}\end{pmatrix}$ erzielt,

sind die Operationen Abbildung und „Vervierfachen“ vertauschbar.

Was wir soeben im Beispiel gesehen haben, beweisen wird nun allgemein:

(1)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1u_1 + b_1u_2\\a_2u_1 + b_2u_2\end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{v}) = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1v_1 + b_1v_2\\a_2v_1 + b_2v_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1u_1 + a_1v_1 + b_1u_2 + b_1v_2\\a_2u_1 + a_2v_1 + b_2u_2 + b_2v_2\end{pmatrix} = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$$

(2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(\vec{u}) = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1u_1 + b_1u_2\\a_2u_1 + b_2u_2\end{pmatrix}$$

$$\cdot k \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot k$$

$$k\vec{u} = \begin{pmatrix}ku_1\\ku_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \alpha(k\vec{u}) = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ku_1\\ku_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1ku_1 + b_1ku_2\\a_2ku_1 + b_2ku_2\end{pmatrix} = k\cdot\alpha(\vec{u})$$

Man nennt diese beiden Eigenschaften die Linearität der Abbildung.

SATZ: **Die affine Vektorabbildung ist linear.**

Beweis in Vektorschreibweise:

Es sei $\boldsymbol{\alpha(\vec{u}) = u_1\vec{a} + u_2\vec{b}}$ die gegebene affine Vektorabbildung.

(1) Dann ist $\boldsymbol{\alpha(\vec{u}+\vec{v})} = (u_1+v_1)\vec{a} + (u_2+v_2)\vec{b} = u_1\vec{a} + v_1\vec{a} + u_1\vec{b} + v_2\vec{b}$

$= (u_1\vec{a} + u_2\vec{b}) + (v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) = \boldsymbol{\alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})}$

(2) Und $\boldsymbol{a(k\vec{u})} = (ku_1)\vec{a} + (ku_2)\vec{b} = k\cdot(u_1\vec{a} + u_2\vec{b}) = \boldsymbol{k\cdot\alpha(\vec{u})}$

Was zu beweisen war.

Eine einfache Folgerung daraus ist:

(3) $\boldsymbol{\alpha(r\vec{u} + s\vec{v}) = r\cdot\alpha(\vec{u}) + s\cdot\alpha(\vec{v})}$

Soll das Bild einer Linearkombination berechnet werden, dann reicht es, die Bildvektoren zu berechnen und dann analoge Linearkombination zu berechnen.

Beispiel: Nehmen wir an, es sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

und wir suchen den Bildvektor zu $\vec{x} = 7\vec{u} - 8\vec{v}$.

Dann ist $\vec{x}' = 7\vec{u}' - 8\vec{v}' = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Die funktionale Schreibweise ist:

$\alpha(7\vec{u} - 8\vec{v}) = \alpha(7\vec{u}) + \alpha(-8\vec{v}) = 7\cdot\alpha(\vec{u}) - 8\alpha(\vec{v}) = 7\vec{u}' - 8\vec{v}'$

Das habe ich jetzt ohne Kenntnis der Abbildungsgleichung berechnet.

3 Abbildungseigenschaften

3.1 Das Bild einer Geraden ist nach einer affinen Abbildung immer eine Gerade.

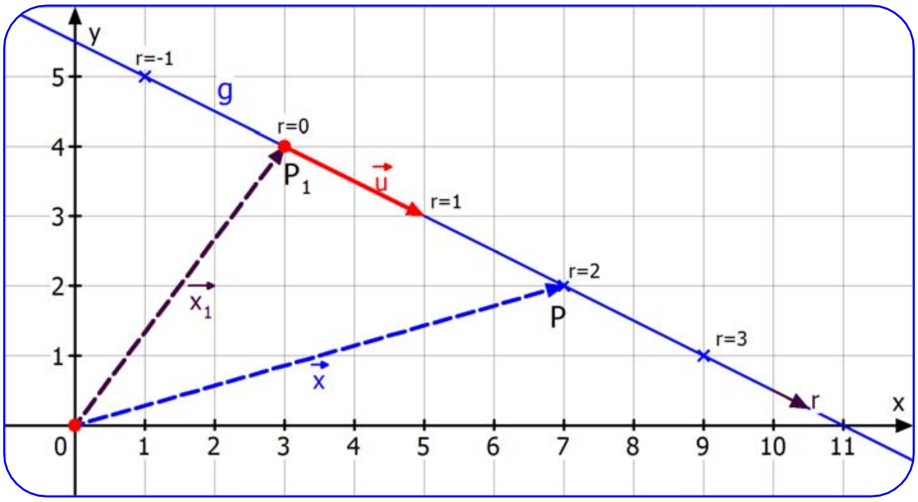
Information zur Geradengleichung.

Eine vektorielle Geradengleichung ist eine <u>Berechnungsformel für die Ortsvektoren der Geradenpunkte</u>.

Man kann den Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ eines Punktes P auf g als Summe zweier Vektoren berechnen.

Man startet im Ursprung und „bewegt sich längs des Pfeiler $\overrightarrow{OP_1}$ (das ist der Ortsvektor des sogenannten Aufpunktes von g) auf die Gerade.

Von P_1 aus bewegt man sich in Richtung $\vec{u}$ (das ist der Richtungsvektor von g) auf der Geraden weiter, und zwar so weit, wie die „Geradenkoordinate" r (r heißt Parameter) angibt.



Mathematischer formuliert:

Der Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ eines beliebigen Geradenpunktes ist die Summe des Ortsvektors des Aufpunktes P_1 mit einem Vielfachen des Richtungsvektors $\vec{u}$: $\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot \vec{u}}$

Mit dieser Methode installiert man auf der Geraden ein 1-dimensionales Koordinatensystem mit einer r-Achse, dessen Nullpunkt im Aufpunkt P_1 liegt. Ich habe einige „r-Koordinaten" angeschrieben.
Der dargestellte Punkt P gehört beispielsweise zu r = 2.

<u>Die dargestellte Gerade g</u> hat diese Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \boxed{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Berechnung des Ortsvektors von P für **r = 2** erfolgt dann so: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Punkt P hat dann dieselben Zahlen als Punktkoordinaten: $P(7 \mid 2)$.

(Ortsvektoren und Punkte haben stets dieselben Koordinaten.)
Man hat die Ortsvektoren erfunden, weil man mit Punkten nicht rechnen kann.

Wie bildet man eine Gerade affin ab?

Beispielrechnungen

(1) Gegeben die affine Abbildung α : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \boxed{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man setzt für $\vec{x}$ die Berechnungsformel aus der Geradengleichung ein:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

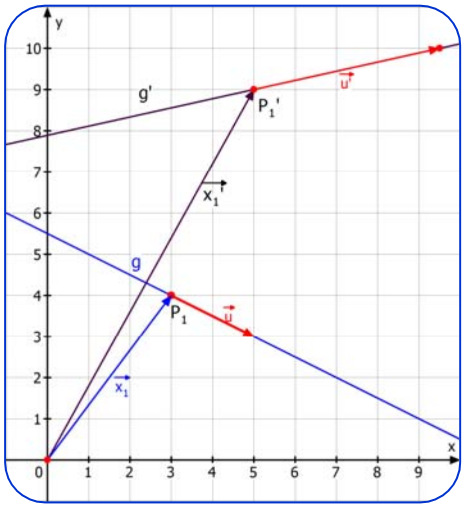
Die Matrizenrechnung gestattet das „Ausmultiplizieren“ (das ist die Linearität!):

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3+4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4+\frac{1}{2} \\ 2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bildgerade: g' : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \boxed{r} \cdot \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das Ergebnis ist wieder die Gleichung einer Geraden.



(2) Die Abbildung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3,2 & -0,4 \\ 0,6 & 1,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ heißt **Euler-Affinität**.

Information: Ihr einziger Fixpunkt ist der Ursprung. In Richtung $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ streckt sie mit dem Faktor 3, in Richtung $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor 2.

Wir wollen die Gerade g mit der Gleichung $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + 1}$ abbilden.

Dazu bringe ich sie zuerst in Vektorform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

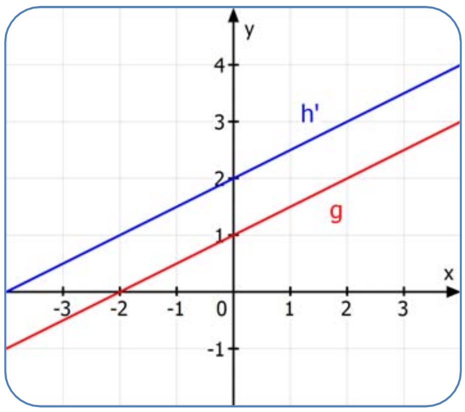
Berechnung der Bildgeraden: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3,2 & -0,4 \\ 0,6 & 1,8 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3,2 & -0,4 \\ 0,6 & 1,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,2 & -0,4 \\ 0,6 & 1,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. h $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 1,8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

oder: g' : $y = \frac{1}{2}x + 2$

<u>Hier</u> ist die Bildgerade sogar parallel zum Urbild.



Nun die allgemeine Berechnung einer Bildgeraden.

Die allgemeine affine Abbildung kann man so darstellen: $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{c}$

Eine beliebige Gerade: $\vec{x} = \vec{x}_1 + r\cdot\vec{u}$

Bildgerade durch Einsetzen: $\vec{x}\,' = A\cdot\left(\vec{x}_1 + r\cdot\vec{u}\right) + \vec{c}$

d. h. $\vec{x}\,' = \underbrace{\left(A\cdot\vec{x}_1 + \vec{c}\right)}_{\vec{x}_1\,'} + r\cdot\underbrace{\left(A\cdot\vec{u}\right)}_{\vec{u}\,'}$

Das Ergebnis ist wieder eine Gerade mit der Gleichung: $\vec{x}\,' = \vec{x}_1\,' + r\cdot\vec{u}\,'$

Man kann diese Rechnung auch ausführlicher aufschreiben:

Die allgemeine affine Abbildung kann man so darstellen: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Abbildung einer beliebigen Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassen: $\vec{x}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1\,'} + r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}\,'}$

Ergebnis: **Das affine Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.**

Aufgabe 3:

Berechne die Gleichung der Bildgeraden g' von g:

a) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$ g: $y = 2x - 4$

b) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

f) $\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

g) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ g: $y = 2x - 1$

Lösung Aufgabe 3

a) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$ g: $y = 2x - 4$ d. h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bildgerade: g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die lineare Geradengleichung hat $m = \frac{-4}{3}$.

Punkt-Steigungsform: $y - 8 = -\frac{4}{3}(x + 4) \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3} + 8 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

b) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bildgerade: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-9-2 \\ 2-3+4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1+6 \\ -2+2 \end{pmatrix}$

g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bildgerade: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0{,}8+1{,}2 \\ 0{,}2+2{,}8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1{,}6+1{,}5 \\ -0{,}4-3{,}5 \end{pmatrix}$

g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -3{,}9 \end{pmatrix}$

d) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bildgerade: g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + r\cancel{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$

Man darf den Richtungsvektor durch ein Vielfaches ersetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Bildgerade: g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r\cancel{\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bildgerade: g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $\alpha:\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bildgerade; g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.

WISSEN: Zwei Geraden sind **parallel**, wenn ihre Richtungsvektoren in der Parametergleichung **Vielfache** voneinander sind.

Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind parallel, weil für ihre Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{v} = 2\vec{u}$ -

Aufgabe: Gegeben ist die affine Abbildung **α** durch $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne die Gleichungen der Bildgeraden g' und h' von g und h und untersuche deren gegenseitige Lage.

Lösung: Bildgerade von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 6+1 \\ -3+2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Bildgerade von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -4+5 \\ 2+10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8-6 \\ -4-12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: h': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Man erkennt, dass h' parallel zu g' ist, weil der Richtungsvektor von h' das Doppelte des Richtungsvektors von g' ist.

Merke: **Bei einer affinen Abbildung bleibt die Parallelität erhalten.**

Beweis:

Allgemeine affine Abbildung: α: $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Beliebige Gerade: g: $\vec{x} = \vec{x}_1 + r \cdot \vec{u}$

Bildgerade: g': $\vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x}_1 + r \cdot \vec{u}) + \vec{c}$ d. h. $\vec{x}\,' = \underbrace{(A \cdot \vec{x}_1 + \vec{c})}_{\vec{x}_1\,'} + r \cdot \underbrace{(A \cdot \vec{u})}_{\vec{u}\,'}$

h ist zu g parallel: h: $\vec{x} = \vec{x}_2 + r \cdot k\vec{u}$

Bildgerade: h': $\vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x}_2 + r \cdot k\vec{u}) + \vec{c}$ d. h. $\vec{x}\,' = \underbrace{(A \cdot \vec{x}_1 + \vec{c})}_{\vec{x}_1\,'} + r \cdot \underbrace{(A \cdot k\vec{u})}_{k \cdot \vec{u}\,'}$

Ergebnis: Der Richtungsvektor von h' ist auch ein Vielfaches des Richtungsvektors von g'.

3.3 Teilverhältnisse von Strecken bleiben bei affinen Abbildungen erhalten

Zuerst ein **Beispiel**: Gegeben sind die Punkte $A(1|4)$ und $B(9|4)$.
T soll AB im Verhältnis 3 : 5 teilen. Berechne die Koordinaten von T.

Bedingung für T: $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{AB}$

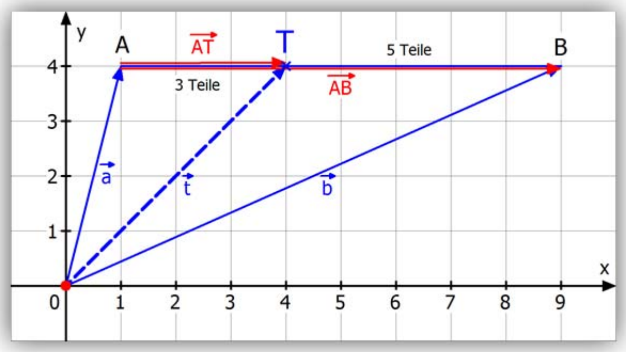
Darstellung durch die Ortsvektoren:

$$\vec{t}-\vec{a} = \tfrac{3}{8}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$\vec{t}-\vec{a} = \tfrac{3}{8}\cdot\vec{b}-\tfrac{3}{8}\cdot\vec{a} \qquad |\ +\vec{a}$$

$$\vec{t} = \tfrac{3}{8}\cdot\vec{b}+\tfrac{5}{8}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{t} = \tfrac{3}{8}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}+\tfrac{5}{8}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{27}{8}+\frac{5}{8}\\ \frac{12}{8}+\frac{20}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \Rightarrow T(4|4)$$



Allgemeine Rechnung: Gegeben sind die Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$.
T soll AB im Verhältnis x : y teilen. Berechne die Koordinaten von T.

Die Bedingung für T lautet: $\overrightarrow{AT} = \frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{AB}$. Berechnung durch die Ortsvektoren:

Aus $\vec{t}-\vec{a} = \frac{x}{x+y}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ folgt $\vec{t}-\vec{a} = \frac{x}{x+y}\cdot\vec{b}-\frac{x}{x+y}\cdot\vec{a} \quad |\ +\vec{a}$

$$\vec{t} = \tfrac{x}{x+y}\cdot\vec{b}-\tfrac{x}{x+y}\cdot\vec{a}+\vec{a} \Rightarrow \vec{t} = \tfrac{x}{x+y}\cdot\vec{b}-\tfrac{x}{x+y}\cdot\vec{a}+\tfrac{x+y}{x+y}\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{t} = \tfrac{x}{x+y}\cdot\vec{b}+\tfrac{y}{x+y}\cdot\vec{a}}$$

Aufgabe: Gegeben ist die affine Abbildung α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Berechne die Bildpunkte von A, B und T aus obigem Beispiel.
In welchem Verhältnis teilt T' die Bildstrecke A'B'?

Lösung:

Vorarbeit: Berechnung der Bildpunkte:

Bildpunkt von $A(1|4)$: $\vec{a}' = \begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4-1\\-1+8+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} \Rightarrow A'(5|8)$

Bildpunkt von $B(9|4)$: $\vec{b}' = \begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18+4-1\\-9+8+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\0\end{pmatrix} \Rightarrow B'(21|0)$

Bildpunkt von $T(4|4)$: $\vec{t}' = \begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8+4-1\\-4+8+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix} \Rightarrow T'(11|5)$

Berechnung des Teilverhältnisses: $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix}21\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'T'} = \begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

Ansatz: $\overrightarrow{A'T'} = k\cdot\overrightarrow{A'B'}$ $\qquad \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}6 = 16\cdot k\\-3 = -8\cdot k\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}k = \frac{3}{8}\\k = \frac{3}{8}\end{Bmatrix}$

Man sieht, dass es eine Lösung gibt (beide Koordinatengleichungen liefern dasselbe), und es gilt wie bei den Urbildern: $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{A'T'} = \frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{A'B'}$, d. h. T' teilt A'B' auch im Verhältnis 3:5.

Nun folgt die allgemeine Untersuchung, also der
Beweis, dass affine Abbildungen Teilverhältnisse nicht verändern:

Auf der Seite zuvor wurde hergeleitet, dass der Teilpunkt T, der AB im Verhältnis x : y teilt,

durch $\vec{t} = \frac{x}{x+y} \cdot \vec{b} + \frac{y}{x+y} \cdot \vec{a}$ berechnet werden kann.

Nun wird T abgebildet in T', und zwar durch die affine Abbildung: $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Es folgt eine trickreiche Berechnung des Bildpunktes T‘.

Die Abbildungsgleichung liefert $\vec{t}' = A \cdot \vec{t} + \vec{c}$

eingesetzt: $\vec{t}' = A \cdot \left(\frac{x \cdot \vec{b}}{x+y} + \frac{y \cdot \vec{a}}{x+y} \right) + \vec{c}$

$$\vec{t}' = A \cdot \frac{x \cdot \vec{b}}{x+y} + A \frac{y \cdot \vec{a}}{x+y} + \vec{c}$$

umgeordnet: $\vec{t}' = \frac{x}{x+y} \cdot A \cdot \vec{b} + \frac{y}{x+y} \cdot A \cdot \vec{a} + \vec{c}$

d. h. $\vec{t}' = \frac{x}{x+y} \cdot A\vec{b} + \frac{y}{x+y} \cdot A\vec{a} + \overbrace{\frac{x+y}{x+y}} \cdot \vec{c}$

d. h. $\vec{t}' = \frac{x}{x+y} \cdot A\vec{b} + \frac{y}{x+y} \cdot A\vec{a} + \frac{x}{x+y} \cdot \vec{c} + + \frac{y}{x+y} \cdot \vec{c}$

d. h. $\vec{t}' = \frac{x}{x+y} \cdot \left(A\vec{b} + \vec{c} \right) + \frac{y}{x+y} \cdot \left(A\vec{a} + \vec{c} \right)$

Und das besagt: $\vec{t}' = \frac{x}{x+y} \cdot \vec{b}' + \frac{y}{x+y} \cdot \vec{a}'$

Dieses Ergebnis hat dieselbe Form wie oben. Also teilt auch T' die Bildstrecke $A'B'$ im gleichen Verhältnis x : y wie dies bei T und AB der Fall war.

Aufgabe 4

a) Gegeben ist die Abbildung α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$. Welche Gleichung hat die Parallele h zu g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $Q(-1 \mid 3)$?
Berechne die Gleichungen der Bildgeraden und weise nach, dass sie auch parallel sind.

b) Gegeben ist die Abbildung α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$.
Berechne den 4. Punkt D des Parallelogramms ABCD mit $A(-2 \mid 5), B(4 \mid 6), C(2 \mid 7)$.
Berechne die Koordinaten der vier Bildpunkte A', B', C' und D'.
Zeige durch Rechnung, dass $A'B'C'D'$ auch ein Parallelogramm.
Warum ist das zu erwarten?

c) T teile die Strecke AB mit $A(5 \mid -2), B(9 \mid 7)$ im Verhältnis 1:2. Berechne seine Koordinaten.
Berechne die drei Bildpunkte mittels $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Rechne damit nach, dass auch T' die Strecke $A'B'$ im Verhältnis 1:2 teilt.

Lösung Aufgabe 4

a) Gegeben ist die Abbildung α durch $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}$.

Welche Gleichung hat die Parallele h zu g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $Q(-1\,|\,3)$?

Berechne die Gleichungen der Bildgeraden und weise nach, dass sie auch parallel sind.

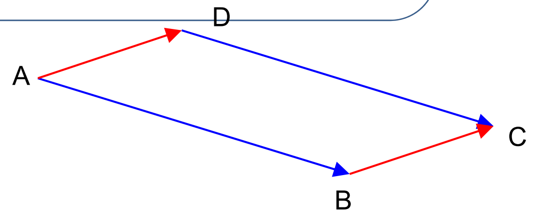
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.   g': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ h': $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Da g' und h' dieselben Richtungsvektoren haben, sind sie parallel.

b) Gegeben ist die Abbildung α durch $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

Berechne den 4. Punkt D des Parallelogramms ABCD mit $A(-2\,|\,5), B(4\,|\,6), C(2\,|\,7)$.
Berechne die Koordinaten der vier Bildpunkte A', B', C' und D'.
Zeige durch Rechnung, dass $A'B'C'D'$ auch ein Parallelogramm.
Warum ist das zu erwarten?



Parallelogrammbedingung:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \;\Leftrightarrow\; \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; D(-4\,|\,6)$

Bildpunkte:

$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A'(8\,|\,-5)$ $\vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B'(16\,|\,-6)$

$\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C'(16\,|\,-7)$ $\vec{d}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A'(8\,|\,-6)$

Parallelogrammnachweis: $\overrightarrow{A'D'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wenn in einem Viereck gilt $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$, dann liegt ein Parallelogramm vor.

c) T teile die Strecke AB mit $A(5\,|\,-2), B(9\,|\,7)$ im Verhältnis 1:2. Berechne seine Koordinaten.

(Text 63005 Seite 37). Berechne die drei Bildpunkte mittels α: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

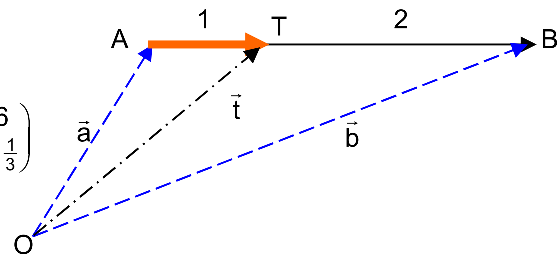
Rechne damit nach, dass auch T' die Strecke A'B' im Verhältnis 1:2 teilt.

$\boxed{\overrightarrow{AT} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}} \;\Leftrightarrow\; \vec{t} - \vec{a} = \tfrac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{t} = \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{2}{3}\vec{a} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; T\left(\tfrac{19}{3}\,|\,1\right)$

$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A'(-3\,|\,14)$, ferner

$B'(15\,|\,13)$ und $T'\left(3\,|\,\tfrac{41}{3}\right)$. Aus $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 18 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A'T'} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

erkennt man, dass auch gilt: $\overrightarrow{A'T'} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}$.



3.4 Wie ändern sich Flächeninhalte bei affinen Abbildungen?

Um diese Frage beantworten zu können, benötigt man Vorkenntnisse aus der Vektorgeometrie.

WISSEN: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, berechnet man mit dem Betrag einer Determinante: $\mathbf{A}_{PG} = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|$

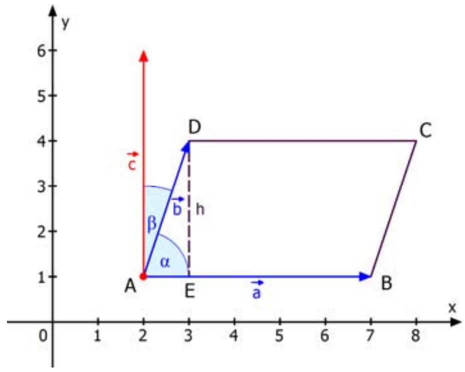
Beispiel: Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dann folgt: $\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 15$

Also ist: $\mathbf{A}_{PG} = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = 15\ (\text{FE})$

Zum Vergleich die Berechnung aus der Mittelstufe:

$\mathbf{A} = g \cdot h = 5 \cdot 3 = 15\ \ (\text{FE})$, denn die Grundseite hat die Länge 5, die Höhe ist (abgelesen) h = 3.



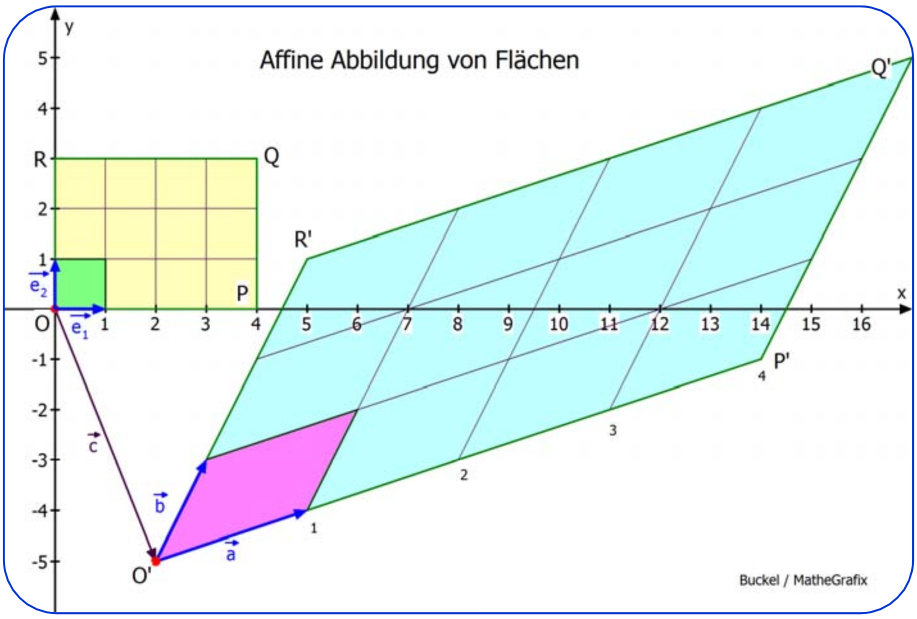
Der Flächeninhalt F einer abgebildeten Figur ändert sich zu $F' = F \cdot \left|\det(A)\right|$

Beweis: Die affine Punktabbildung kann man auch so schreiben: $\vec{x}' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c}$

Damit kann man jeden Bildpunkt als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen.

Man kann das in folgender Darstellung leicht nachvollziehen: (Siehe auch Seite 4 ff.)

Die folgende Darstellung zeigt die Abbildung des Rechtecks OPQR mit $O(0|0), P(4|0), Q(4|3), R(0|3)$ durch die Abbildung $\alpha: \ \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Parallelogramm O'P'Q'R'.



Dabei ist $\vec{a}$ der Bildvektor von $\vec{e}_1$ und $\vec{b}$ der Bildvektor von $\vec{e}_2$. Man erkennt, dass dabei das von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannte Einheitsquadrat (das quasi die Maßeinheit der Flächeninhalte darstellt) in das Parallelogramm übergeht, das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Folgerung:

Das Rechteck OPQR hat den Inhalt 12 FE (12 Einheitsquadrate). Bei der Abbildung durch α geht dieses über in das Parallelogramm $O'P'Q'R'$ mit dem Inhalt 12 „Einheitsparallelogramme“, womit das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm gemeint ist.

Das Bildviereck hat also für den **Flächeninhalt dieselbe Maßzahl, nur die Einheit für die Fläche ändert sich**. Sie geht von 1 FE (Einheitsquadrat) in 1 „Einheitsparallelogramm“ über.

Es gilt also $F' = 12 \cdot F_{PG}$. Nach den Überlegungen der vorangegangen Seite, wonach das aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den Inhalt $\left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$ bzw. $|\det A|$ hat, gilt dann für den Inhalt der Bildfigur: $F' = 12 \cdot |\det A|$.
Diese Überlegungen lassen sich auf Dreiecke, daraus zusammengesetzte beliebige Vielecke und auch auf gekrümmte Figuren übertragen, worauf hier verzichtet wird.

4 Fixpunkte von affinen Abbildungen

Ein Punkt, dessen Bildpunkt mit dem Urbild zusammenfällt, heißt Fixpunkt.
Man kann auch sagen: Fixpunkte werden auf sich selbst abgebildet.
Nun erinnert man sich vielleicht daran, dass eine Achsenspiegelung unendlich viele Fixpunkte hat, nämlich alle Punkte der Achse.

Übersicht: **Für Affine Abbildungen gibt es folgende Möglichkeiten:**

Sie haben
(1) keinen Fixpunkt
(2) genau einen Fixpunkt
(3) unendlich viele Fixpunkte, die auf einer Geraden liegen
(4) NUR Fixpunkte (die identische Abbildung)

Beweis

Gegeben ist α durch $\vec{x}' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$

Dies führt zu $x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c} = \vec{x}$ d. h. $x\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

bzw. als Gleichungssystem: $\left\{\begin{matrix}a_1x + b_1y + c_1 = x\\ a_2x + b_2y + c_2 = y\end{matrix}\right\}$

Umgestellt: $\left\{\begin{matrix}(a_1-1)\cdot x + b_1\cdot y = -c_1\\ a_2\cdot x + (b_2-1)\cdot y = -c_2\end{matrix}\right\}$

Jetzt benötigt man die Grundlagen über lineare Gleichungssysteme (Text 61012 z.B. Seite 15):

Ist die Determinante dieses Gleichungssystems ungleich 0, dann gibt es laut Cramerscher Regel eine eindeutige Lösung, also genau einen Fixpunkt.

Ist aber $D = \begin{vmatrix}a_1-1 & b_1\\ a_2 & b_2-1\end{vmatrix} = 0$, dann gibt es entweder keine Lösung, oder unendlich viele Lösungen.

Beispiele:
Affine Abbildungen mit einer Fixpunktgeraden nennt man **Achsenaffinitäten**.
Sie haben besondere Eigenschaften und lassen sich gut konstruieren.

Siehe Text 21220 „Achsenaffinitäten“

Affine Abbildungen mit genau einem Fixpunkt und zwei linear unabhängigen Eigenvektoren (Siehe Abschnitt 4) nennt man **Euler-Affinitäten**.
Sie haben besondere Eigenschaften und lassen sich gut konstruieren.

Siehe Text 21230 „Euler-Affinitäten“

Berechnungsbeispiele für Fixpunkte:

(1) Gegeben: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$

Folgerung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x = 2x + 3y - 1 \\ y = -x + y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 0 = x + 3y - 1 \\ 0 = -x \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (2) folgt x = 0, aus (1) $y = \frac{1}{3}$. Ergebnis: **Einziger Fixpunkt** ist $F\left(0 \mid \frac{1}{3}\right)$.

(2) Gegeben: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x = 2x + 3y - 1 \\ y = \ \ x + 4y - 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 0 = x + 3y - 1 \\ 0 = x + 3y - 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(2) ist identisch mit (1), also keine neue Bedingung. Alle Punkt, welche (1) erfüllen, sind somit Fixpunkte. (1) stellt eine Gerade dar: $3y = -x + 1$ also $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Dies ist eine **Fixpunktgerade**. Die gegebene Abbildung heißt **Achsenaffinität**.

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$ d. h. $x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{7} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{7} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{7}y = x \\ \frac{1}{4}\sqrt{7}x + \quad \frac{3}{4}y = y \end{Bmatrix}$ d. h. $\begin{Bmatrix} -\frac{7}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{7}y = 0 & | \cdot(-4) \\ \frac{1}{4}\sqrt{7}x - \quad \frac{1}{4}y = 0 & | \cdot 4 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} 7x - \sqrt{7} \cdot y = 0 & | :\sqrt{7} \\ \sqrt{7}x - \quad y = 0 & \end{Bmatrix} \quad \text{d. h.} \quad \begin{Bmatrix} \sqrt{7}x - y = 0 \\ \sqrt{7}x - y = 0 \end{Bmatrix}$$

Beide Gleichungen führen auf $y = \sqrt{7} \cdot x$ (Fixpunktgerade)

Aufgabe 5: Berechne die Fixpunkte zu den folgenden Abbildungen:

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$ f) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{23}{5} \end{pmatrix}$

g) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\vec{x}$ h) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ i) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 5

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -x + 2y \\ y = x + y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = y \\ 0 = x \end{Bmatrix}$

Es folgt: $F(0\,|\,0)$.

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x + 2y \\ y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = y \\ y = y \end{Bmatrix}$

Alle Punkte mit y = 0 sind Fixpunkte.

Die x-Achse ist **Fixpunktgerade**.

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 3x + y - 1 \\ y = 2x + 4y + 2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} 2x + y = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(2) – (1): $2y = -3 \Rightarrow y_F = -\frac{3}{2}$

In (1): $2x - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow x_F = \frac{5}{4}$

Fixpunkt: $F\left(\frac{5}{4}\,|\,-\frac{3}{2}\right)$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ Bed. $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x \\ y = 3x + 2y - 3 \end{Bmatrix}$

Die 1. Gleichung besagt, dass x beliebig sein dar, aus der 2. Gleichung folgt $y = -3x + 3$, das ist dann die Gleichung der **Fixpunktgeraden**.

e) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$ Bed.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{3}{5} \\ y = \frac{16}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{24}{5} \end{Bmatrix}$

d. h. $\begin{Bmatrix} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5} \\ \frac{16}{5}x - \frac{8}{5}y = \frac{24}{5} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{2x - y = 3\}$

Die 2. Gleichung ist das Achtfache der ersten und daher überflüssig.

Alle Punkte, die die 1. Gleichung erfüllen, sind also Fixpunkte.

Also ist a: $y = 2x - 3$ Fixpunktgerade

f) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{23}{5} \end{pmatrix}$ Bed.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{23}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{3}{5} \\ y = \frac{16}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{23}{5} \end{Bmatrix}$

d. h. $\begin{Bmatrix} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5} \\ \frac{16}{5}x - \frac{8}{5}y = \frac{23}{5} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Durch $(2) - 8 \cdot (1)$ erhält man: $0 = -\frac{1}{5}$.

Dies ist ein Widerspruch (gegen die Annahme, man können einen Fixpunkt berechnen.

Ergebnis: Es gibt keinen Fixpunkt.

g) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \vec{x}$ Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0{,}8x + 0{,}3y \\ y = 0{,}2x + 0{,}7y \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} 0{,}2x - 0{,}3y = 0 \\ -0{,}2x + 0{,}3y = 0 \end{Bmatrix}$$

Die 2. Gleichung ist keine neue Bedingung für Fixpunkte.

Fixpunkte sind also alle Punkte, die $0{,}2x - 0{,}3y = 0$ erfüllen,

d. h. auf der Geraden $y = \frac{2}{3}x$ liegen.

Ergebnis: Es liegt eine Achsenaffinität vor.

h) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x - y \\ y = x + 2y + 3 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} y = 0 \\ 0 = x + y + 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = -3$$

Ergebnis: Die Abbildung hat genau einen Fixpunkt: $F(-3 \mid 0)$

i) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -13 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \end{pmatrix}$

Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -3x + 8y - 6 \\ y = 7x - 13y + 21 \end{Bmatrix}$

d. h. $\begin{Bmatrix} 4x - 8x = -6 & \mid :4 \\ -7x + 14y = 21 & \mid :(-7) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 2y = -\frac{3}{2} \\ x - 2y = -3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

$(1) - (2)$ ergibt den Widerspruch $0 = \frac{3}{2}$.

(Es ist ein Widerspruch gegen die bei Annahme, man könnte einen Fixpunkt berechnen.)

Ergebnis: Es gibt also keinen Fixpunkt.

5 Fixrichtungen bzw. Eigenvektoren von affinen Abbildungen

(Siehe auch den ausführlichen Text 21310)

Ein Vektor, dessen Bildvektor ein Vielfaches von sich ist, heißt **Eigenvektor** der Abbildung. Diese sind sehr wichtig. Denn wenn man eine Fixgerade sucht, dann muss die Bildgerade einen Richtungsvektor mit gleicher Richtung haben. Die Richtung einer Fixgeraden ist eine Fixrichtung! Dazu reicht es, dass der Bildvektor des Richtungsvektors ein Vielfaches davon ist.

Beispiel 12: $\beta: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Ganz ausführliche Rechnung:

Bedingung für Eigenvektoren: $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, **also** $A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$

Das heißt: $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\left\{ \begin{aligned} 0,8 \cdot u_1 + 0,3 \cdot u_2 &= k \cdot u_1 \\ 0,2 \cdot u_1 + 0,7 \cdot u_2 &= k \cdot u_2 \end{aligned} \right\}$

bzw. $\left\{ \begin{aligned} (0,8-k) \cdot u_1 + \quad 0,3 \cdot u_2 &= 0 \\ 0,2 \cdot u_1 + (0,7-k) \cdot u_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ (EWS)

Bevor wir weiterrechnen, benötigen wir einiges aus der Theorie der Gleichungssysteme.
Wir suchen für die Lösung des sogenannten **Eigenwertsystemsystems** (EWS) Vektoren $\vec{u} \neq \vec{o}$.
Den Nullvektor schließt man als Lösungsvektor aus (er ist als Richtungsvektor unbrauchbar!).
Allerdings ist der Nullvektor durchaus eine Lösung des EWS.

Zur ***Lösbarkeit von Gleichungssystemen*** gibt es die **Cramersche Regel:**

Wenn die Determinante der linken Seite (EWS) ungleich 0 ist, dann gibt es eine eindeutige Lösung. Und die ist dann weil rechts Nullen stehen, der Nullvektor.
Wenn aber diese Determinante Null wird, dann sind die beiden Gleichungen des Systems Vielfache. Also liegt dann in Wirklichkeit nur eine Gleichung vor, und die hat auch nicht-triviale Lösungen, damit meint man Lösungen, die nicht Null sind.

Das spielen wir nun durch. Zuerst berechnen wir die Determinante des Systems:

$$\begin{vmatrix} 0,8-k & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-k \end{vmatrix} = (0,8-k)(0,7-k) - 0,2 \cdot 0,3 = ... = k^2 - 1,5 \cdot k + 0,5$$

Die Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist $\begin{vmatrix} 0,8-k & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-k \end{vmatrix} = 0$

also $k^2 - 1,5 \cdot k + 0,5 = 0$ (das ist die **charakteristische Gleichung**!)

mit den Lösungen $k_{1,2} = \dfrac{1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,5}}{2} = \dfrac{1,5 \pm 0,5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0,5 \end{cases}$

Die beiden Lösungen $k_1 = 1$ und $k_2 = 0,5$ heißen die **Eigenwerte der Abbildung oder der Matrix.**

Nun sollte man nicht den Faden verlieren. Wir haben das Gleichungssystem noch nicht gelöst sondern erst herausgefunden, dass es nur für $k_1 = 1$ und $k_2 = 0,5$ nichttriviale Lösungsvektoren also Eigenvektoren gibt. Und die berechnen wir jetzt:

Das Gleichungssystem für Eigenvektoren lautete $\begin{Bmatrix} (0{,}8-k)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-k)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ (EWS)

Und wir haben berechnet, dass es nur für die Eigenwerte $k_1 = 1$ und $k_2 = 0{,}5$ Eigenvektoren gibt, also Lösungen, die nicht der Nullvektor sind.

Eigenwertsystem für $k_1 = 1$: $\begin{Bmatrix} (0{,}8-1)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-1)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

d. h. $\begin{Bmatrix} -0{,}2\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 - 0{,}3\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ (1) (2)

Man erkennt, was die Theorie für diesen Fall vorausgesagt hat:
(2) ist das (-1) fache von (1) und daher überflüssig.

Der gesuchte Eigenvektor ist also Lösungsvektor der Gleichung (1) oder (2).

Berechnung der Lösung: $-0{,}2\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0$

$0{,}3\,u_2 = 0{,}2\,u_1 \quad | \cdot 10$

$3u_2 = 2u_1$

Bei einer Gleichung mit zwei Unbekannten kann man eine frei wählen.
Damit keine Brüche entstehen, wähle ich $u_1 = 3r,\ r \in \mathbb{R}$

Dann folgt $3u_2 = 2\cdot 3r \Rightarrow u_2 = 2r$

Eigenvektor ist damit $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$.

Eigenvektoren für $k_2 = 0{,}5$: $\begin{Bmatrix} (0{,}8-0{,}5)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-0{,}5)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

d. h. $\begin{Bmatrix} 0{,}3\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + 0{,}2\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} |:0{,}3 \\ |:0{,}2 \end{matrix}$

Beide Gleichungen führen zu $u_1 + u_2 = 0$

Ich wähle jetzt $u_2 = s \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_1 = -s$

Eigenvektor ist damit $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = \frac{1}{2}\vec{u}_2$

Gesamtergebnis:

Die Matrix A (bzw. die zugehörige Abbildung α hat zwei **linear unabhängige Eigenvektoren** $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = \frac{1}{2}\vec{u}_2$.

Mit jedem dieser Eigenvektoren ist auch jedes Vielfache ein Eigenvektor. Wenn man das weiß, reicht es, das Ergebnis so aufzuschreiben.

Ausblick: Wenn unsere Abbildung Fixgeraden hat, dann können sie nur in Richtung dieser Eigenvektoren verlaufen.

Nach dieser Langversion der Eigenvektoren-Berechnung zeige ich,
wie kann sie kürzer aufschreiben kann, und welche Text man dazu verwenden könnte.

Kompakte Lösung:

Gegeben ist die Abbildung $\beta: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Bedingung für Eigenvektoren: $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, **also** $\boxed{A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$

Eigenwertsystem: (EWS) $\begin{cases} (0{,}8-k)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-k)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$ oder $\begin{pmatrix} 0{,}8-k & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 0{,}8-k & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $k^2 - 1{,}5\cdot k + 0{,}5 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4\cdot 0{,}5}}{2} = \dfrac{1{,}5 \pm 0{,}5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0{,}5 \end{cases}$

Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:

EWS für $k_1 = 1$: $\begin{cases} (0{,}8-1)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-1)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} -0{,}2\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 & (1) \\ 0{,}2\cdot u_1 - 0{,}3\cdot u_2 = 0 & (2) \end{cases}$

Die Gleichung (1) ist ein Vielfaches der zweiten, weshalb es unendlich viele Lösungen gibt.

Aus (1) folgt: $0{,}3u_2 = 0{,}2u_1 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3}u_1$. Ich wähle $u_1 = 3r$ und erhalte $u_2 = 2r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sie **gehören zum Eigenwert $k_1 = 1$**, d. h. für sie gilt: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$

EWS für $k_2 = 0{,}5$: $\begin{cases} (0{,}8-0{,}5)\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2\cdot u_1 + (0{,}7-0{,}5)\cdot u_2 = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} 0{,}3\cdot u_1 + 0{,}3\cdot u_2 = 0 & |:0{,}3 \\ 0{,}2\cdot u_1 + 0{,}2\cdot u_2 = 0 & |:0{,}2 \end{cases}$

Aus beiden Gleichungen folgt $u_1 + u_2 = 0$

Wählt man z. B. $u_1 = r$, folgt $u_2 = -r$ und wir haben als zweiten Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sie **gehören zum Eigenwert $k_2 = 0{,}5$,**

d. h. für sie gilt: $\vec{u}_2' = \frac{1}{2}\cdot\vec{u}_2$ Unsere Abbildung ist eine Parallelstreckung.

Hinweis: Stellt man diese **Berechnung allgemein** dar, sieht das z. B, so aus:

Gegeben $\alpha: \quad \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{c}$

Bedingung für Eigenvektoren: $A\cdot\vec{u} = k\cdot\vec{u}$

d. h. $A\cdot\vec{u} = k\cdot E\vec{u} \Leftrightarrow (A - kE)\vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\det(A - E) = 0$

d. h. $\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0$ usw.

Beispiel 13: Gegeben sei α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Vorarbeit: Fixpunktberechnung:

$$\vec{x} = \vec{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = 2x - 0{,}5y \\ y = 2x + 4y \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = 0{,}5y \\ 0 = 2x + 3y \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Setzt man (1) in (2) ein, folgt x = y = 0. **Einziger Fixpunkt** ist der Ursprung: $O(0\,|\,0)$,

Berechnung der Eigenwerte:

Bedingung: $\boxed{A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$ d. h. $A \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u}$

Oder gleich so beginnen: $\boxed{(A - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Eigenwertsystem : $\begin{pmatrix} 2-k & -0{,}5 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

Charakteristische Gleichung für Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 2-k & -0{,}5 \\ 2 & 4-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(2-k)(4-k) + 2 \cdot 0{,}5 = 0$ d. h. $k^2 - 6x + 9 = 0$

Einziger Eigenwert: $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$

Eigenwertsystem zu k = 3:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -0{,}5 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} -u_1 - 0{,}5u_2 = 0 \\ 2u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Aus beiden Gleichungen folgt $u_2 = -2u_1$. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R}$, dann folgt $u_2 = -2r$, dann erhält man $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 3 \cdot \vec{u}$.

Einzige Fixgerade ist g: $y = -2x$ (Siehe Abschnitt 6)

Erklärung der Abbildung:

Punkte auf der Fixgeraden haben ihr Bild auch auf g.
So gilt: $\overrightarrow{FC'} = 3 \cdot \overrightarrow{FC}$.

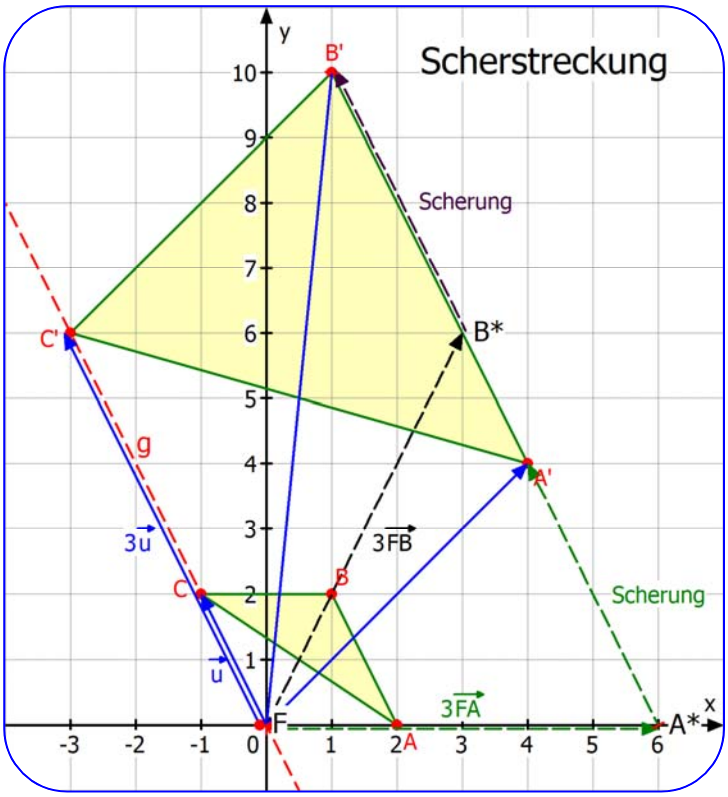
Für alle anderen Punkte, die also nicht auf g liegen, gilt folgendes:

Zuerst führt man eine zentrische Streckung vom Fixpunkt F mit k = 3 aus:
$\overrightarrow{FA^*} = 3 \cdot \overrightarrow{FA}$ bzw. $\overrightarrow{FB^*} = 3 \cdot \overrightarrow{FB}$.

Dann führt man eine Scherung aus, bei der g als Achse wirkt.
B* wird parallel zu g nach B' „geschert“, A* analog.

Eine Abbildung mit einem Fixpunkt und genau einer Fixgeraden durch den Fixpunkt heißt **Scherstreckung**.

Mehr im Text 21221.



Aufgabe 6: Berechne die Eigenvektoren zu folgenden Abbildungen:

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ e) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

g) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{10}{13} & -\frac{24}{13} \\ \frac{24}{13} & \frac{10}{13} \end{pmatrix} \vec{x}$ Die Lösungen folgen ab der nächsten Seite.

Aufgabe 7: Berechne die Eigenvektoren zu

Lösungen ab Seite 47

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ mit $t \neq 1$ j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Lösungen Seite 52/53

(1) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \vec{x}$ mit $t \neq -1$ (2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & t \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ (3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$

a) Bestimme die Anzahl der Eigenwerte in Abhängigkeit von t.

b) Bestimme im Falle nur eines Eigenwertes die Eigenvektoren.

c) Bestimme den 2. Eigenwert, wenn der andere -1 ist - Nicht im Falle (2) bearbeiten.

Aufgabe 9

Lösungen Seite v54

a) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Zeige, dass die Matrix keinen Eigenwert besitzt.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Zeige, dass die Matrix zwei Eigenwerte besitzt.

Lösung 6a) Bestimmung von Eigenvektoren

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Bedingung: $\boxed{A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}}$ d. h. $A \cdot \vec{u} = k \cdot E \cdot \vec{u}$

bzw. $\boxed{(A - k \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}}$

Eigenwertsystem : $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (EWS)

Charakteristische Gleichung für Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(1-k)(-1-k) = 0$

Eigenwerte: $k_1 = 1, \; k_2 = -1$

Eigenwertsystem zu $k_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\boxed{1} & 2 \\ 0 & -1-\boxed{1} \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \cdot \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{matrix} 2u_2 = 0 \\ -2u_2 = 0 \end{matrix} \right\} \;\Leftrightarrow\; u_2 = 0$$

Da u_1 nicht in der Bedingung vorkommt, kann u_1 beliebig gewählt werden: $u_1 = r \in \mathbb{R}$

1. Eigenvektor ist somit $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenwertsystem zu $k_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\boxed{-1} & 2 \\ 0 & -1-\boxed{-1} \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \cdot \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{matrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Die zweite Gleichung stellt keine Bedingung dar, aus der 1. Gleichung folgt: $u_1 = -u_2$

Wählt man $u_2 = r \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; u_1 = -r$.

2. Eigenvektor ist somit $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$.

Lösung 6b)

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ -3 & 2-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ -3 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (2-k)^2 + 9 = 0$

bzw. $(2-k)^2 = -9$

Da ein Quadrat nie negativ werden kann, hat diese Gleichung keine Lösungen.

Es gibt also keine Eigenvektoren.

Lösung 6c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1-k & 4 \\ -1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -1-k & 4 \\ -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$

d. h $(-1-k)(3-k)+4=0$

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$(k-1)^2 = 0$

Einziger Eigenwert ist k = 1.

Eigenwertsystem für k = 1: $\begin{pmatrix} -1-\boxed{1} & 4 \\ -1 & 3-\boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} -2u_1 + 4u_2 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Die 1. Gleichung ist entbehrlich, also bleibt: $u_1 = 2u_2$.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$

Eigenvektoren sind daher $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

Lösung 6d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristischer Gleichung: $\begin{vmatrix} 3{,}2-k & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(3{,}2-k)(1{,}8-k)+0{,}24=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 5k + 6 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Eigenwertsystem für k_1 = 3: $\begin{pmatrix} 3{,}2-3 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -1{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} 0{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 1{,}2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die 2. Gleichung ist das Dreifache der ersten und daher entbehrlich. Es folgt $u_1 = 2u_2$.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = 3\vec{u}_1$.

Eigenwertsystem für k_1 = 2: $\begin{pmatrix} 3{,}2-2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}8-2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} 1{,}2u_1 - 0{,}4u_2 = 0 \\ 0{,}6u_1 - 0{,}2u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Die 1. Gleichung ist das Doppelte der zweiten und daher entbehrlich. Es folgt $u_2 = 3u_1$.

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 3r$

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ 3r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 2\vec{u}$.

Lösung 6e) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac12 & 1 \\ -\frac12 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} \frac12 - k & 1 \\ -\frac12 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristischer Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac12 - k & 1 \\ -\frac12 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac12 - k\right)(2-k) + \frac12 = 0$

$k^2 - \frac52 k + \frac32 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2k^2 - 5x + 3 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \dfrac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac32 \\ 1 \end{cases}$

Eigenwertsystem für $k_1 = \frac32$: $\begin{pmatrix} \frac12 - \frac32 & 1 \\ -\frac12 & 2-\frac32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac12 & \frac12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -u_1 + u_2 = 0 \\ -\frac12 u_1 + \frac12 u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (2) ist entbehrlich.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; u_1 = r$.

Eigenvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \frac32 \vec{u}_1$

Eigenwertsystem für $k_2 = 1$: $\begin{pmatrix} \frac12 - \boxed{1} & 1 \\ -\frac12 & 2-\boxed{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -\frac12 & 1 \\ -\frac12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -\frac12 u_1 + u_2 = 0 \\ -\frac12 u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow\; u_1 = 2u_2$ (2) ist entbehrlich.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; u_1 = 2r$.

Eigenvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = \vec{u}_2$

Lösung 6f) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ EWS: $\begin{pmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 - 2k - 8 = 0$

Eigenwerte: $k_1 = 4$, $k_2 = -2$.

Eigenvektoren zu $k_1 = 4$: Alle Vielfachen von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = 4\vec{u}_1$

Eigenvektoren zu $k_1 = -2$: Alle Vielfachen von $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -2\vec{u}_2$

Lösung 6g) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{10}{13} & -\frac{24}{13} \\ \frac{24}{13} & \frac{10}{13} \end{pmatrix}\vec{x}$ EWS: $\begin{pmatrix} \frac{10}{13} - k & -\frac{24}{13} \\ \frac{24}{13} & \frac{10}{13} - k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{10}{13} - k & -\frac{24}{13} \\ \frac{24}{13} & \frac{10}{13} - k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{10}{13} - k\right)^2 + \frac{24}{13} = 0$

Das führt auf $\left(\frac{10}{13} - k\right)^2 = -\frac{24}{13}$.

Diese Gleichung hat keine Lösung, da ein Quadrat nie negativ sein kann.
Es gibt keine Eigenvektoren.

Lösungen Aufgabe 7 von Seite 43

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (2-k)u_1 = 0 \\ (-1-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-k)(-1-k) = 0$

Eigenwerte sind also die Lösungen $k_1 = 2, k_2 = -1$

Eigenvektoren zu $k_1 = 2$: $\begin{Bmatrix} 0 \cdot u_1 = 0 & (1) \\ -3u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ Aus (2) folgt $u_2 = 0$, (1) entfällt, also u_1 bel.

Lösungsvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = 2 \cdot \vec{u}_1$, $r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren zu $k_1 = -1$: $\begin{Bmatrix} 3 \cdot u_1 = 0 & (1) \\ 0 \cdot u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ Aus (1) folgt $u_1 = 0$, (2) entfällt, also u_2 bel.

Lösungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2$, $s \in \mathbb{R}$

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen (IMMER!)

wobei gilt: $\vec{u}_1{}' = 2 \cdot \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 3-k & -2 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (3-k)u_1 - 2u_2 = 0 \\ (-1-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-k)(1-k) = 0$

Eigenwerte sind also die Lösungen $k_1 = 3, k_2 = 1$

Eigenvektoren zu $k_1 = 3$: $\begin{Bmatrix} -2 \cdot u_2 = 0 & (1) \\ -4 \cdot u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0$, u_1 ist beliebig wählbar:

$u_1 = r,\ r \in \mathbb{R}$.

Lösungsvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = 3 \cdot \vec{u}_1$ $r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren zu $k_1 = 1$: $\begin{Bmatrix} 2 \cdot u_1 - 2u_2 = 0 & (1) \\ 0 \cdot u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus (1) folgt $u_1 = u_2$, (2) entfällt, also kann man eine Unbekannte frei wählen.

Wähle $u_2 = s$, $s \in \mathbb{R}$: Das ergibt $u_1 = s$.

Lösungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen (IMMER!)

wobei gilt: $\vec{u}_1{}' = 3 \cdot \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2{}' = \vec{u}_2$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1-k & 3 \\ 4 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (1-k)u_1 + \quad 3u_2 = 0 \\ 4u_1 + (2-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 3 \\ 4 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)(2-k) - 12 = 0$

Quadratische Gleichung: $k^2 - 3k - 10 = 0$ mit $k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

Eigenwerte sind also die Lösungen $k_1 = 5, k_2 = -2$

Eigenvektoren zu k_1 = 5: $\begin{Bmatrix} -4u_1 + 3u_2 = 0 & (1) \\ 4u_1 - 3u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ (1) ist entbehrlich.

Also ist z. B. u_2 beliebig wählbar: $u_2 = 4r,\ r \in \mathbb{R}$, ergibt $4u_1 - 12r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 3r$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 4r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = 5 \cdot \vec{u}_1 \quad r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren zu k_1 = -2: $\begin{Bmatrix} 3u_1 + 3u_2 = 0 & (3) \\ 4u_1 + 4u_2 = 0 & (4) \end{Bmatrix}$ Beide sind Vielfache von $u_1 + u_2 = 0$.

Also ist z. B. u_2 beliebig wählbar: $u_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$, ergibt $u_1 = -s$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -2\vec{u}_2$

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen,

wobei gilt: $\vec{u}_1{}' = 5 \cdot \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2{}' = -2\vec{u}_2$.

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-k & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2}-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{2}-k\right)u_1 \qquad = 0 \\ 5u_1 - \left(\frac{1}{2}+k\right)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-k & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2}-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-k\right)\left(-\frac{1}{2}-k\right) = 0$

Eigenwerte sind also die Lösungen $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{2}$

Eigenvektoren zu k_1 = $\frac{1}{2}$ $\begin{Bmatrix} 0 = 0 & (1) \\ 5u_1 - u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ (1) ist entbehrlich.

Also ist z. B. u_1 beliebig wählbar: $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R}$, ergibt $5r - u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = 5r$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 5r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_1 \quad r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren zu k_2 = $-\frac{1}{2}$: $\begin{Bmatrix} u_2 = 0 & (3) \\ 5u_1 = 0 & (4) \end{Bmatrix}$ (4) ist entbehrlich, u_2 = 0

Also ist u_1 beliebig wählbar: $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R}$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\frac{1}{2}\vec{u}_2$

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen,

wobei gilt: $\vec{u}_1{}' = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2{}' = -\frac{1}{2}\vec{u}_2$.

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} -2-k & 1 \\ 0 & -2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (-2-k)u_1 + & u_2 = 0 \\ & (-2-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -2-k & 1 \\ 0 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2-k)^2 = 0$

Eigenwert ist die Lösung $k = -2$

Eigenvektoren zu k = -2 $\begin{Bmatrix} u_2 = 0 & (1) \\ 0 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ (2) ist entbehrlich, $u_2 = 0$.

Also ist u_1 beliebig wählbar: $u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$

Lösungsvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = -2\vec{u}$, $r \in \mathbb{R}$

Ergebnis: Eigenvektor ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen, wobei gilt $\vec{u}' = -2\vec{u}$.

f) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 5-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (5-k)u_1 - & u_2 = 0 \\ u_1 + & (3-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (5-k)(3-k)+1 = 0$

Quadratische Gleichung: $k^2 - 8k + 16 = 0$ mit $k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

Eigenwert ist die Lösung $k = 4$

Eigenvektoren zu k = 4 $\begin{Bmatrix} u_1 - u_2 = 0 & (1) \\ u_1 - u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$ (2) ist entbehrlich

Also ist z. B. u_1 beliebig wählbar: $u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$, ergibt $u_2 = r$

Lösungsvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 4\vec{u}$ $r \in \mathbb{R}$

Ergebnis: Eigenvektor ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen, wobei gilt $\vec{u}' = 4\vec{u}$.

g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} (2-k)u_1 + & u_2 = 0 \\ -u_1 + & (2-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-k)^2 + 1 = 0$

Diese Gleichung hat keine Lösungen, also gibt es keine Eigenwerte und somit auch keine nicht-trivialen Lösungen des Gleichungssystems, d. h. nur der Nullvektor ist (unbrauchbarer) Lösungsvektor.

Es gibt also keine Eigenvektoren.

h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-k & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} \left(\frac{1}{4}-k\right)u_1 + \qquad \frac{3}{4}u_2 = 0 \\ \frac{3}{2}u_1 + \left(-\frac{1}{2}-k\right)u_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{1}{4}-k & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{4}-k\right)\left(-\frac{1}{2}-k\right) - \frac{9}{8} = 0$

Ausmultiplizieren: $-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}k + k^2 - \frac{9}{8} = 0$

bzw. $k^2 + \frac{1}{4}k - \cancel{\frac{10}{8}}\ \frac{5}{4} = 0 \quad |\cdot 4$

$4k^2 + k - 5 = 0$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 4\cdot 5}}{2\cdot 4} = \frac{-1\pm 9}{8} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Eigenwerte sind also die Lösungen $k_1 = 1, k_2 = -\frac{5}{4}$

Eigenvektoren zu $k_1 = 1$ $\left\{ \begin{array}{rr} -\frac{3}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 = 0 & (1) \\ \frac{3}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 = 0 & (2) \end{array} \right\}$

Multipliziert man (1) mit (-2), erhält man die Gleichung (2), die also entbehrlich ist.

Vereinfachung von (1) durch Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ ergibt $-u_1 + u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = u_1$.

Also ist z. B. u_1 beliebig wählbar: $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R}$, ergibt $u_2 = r$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 \quad r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren zu $k_2 = -\frac{5}{4}$: $\left\{ \begin{array}{rr} \frac{3}{2}u_1 + \frac{3}{4}u_2 = 0 & (3) \\ \frac{3}{2}u_1 + \frac{3}{4}u_2 = 0 & (4) \end{array} \right\}$ (4) ist entbehrlich.

Multiplikation von (1) mit $\frac{4}{3}$ ergibt $2u_1 + u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = -2u_1$.

Also z. B. u_1 beliebig wählbar: $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R}$, ergibt $u_2 = -2s$

Lösungsvektoren: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} s \\ -2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\frac{5}{4}\vec{u}_2$

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen,

wobei gilt: $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2{}' = -\frac{5}{4}\vec{u}_2$.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ mit $t \neq 1$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ t & 1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} (1-k)u_1 \qquad\qquad = 0 \\ t\cdot u_1 + (1-k)u_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ t & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$

Eigenvektoren zu k = 1 $\left\{ \begin{array}{rr} 0 = 0 & (1) \\ tu_1 = 0 & (2) \end{array} \right\}$ (1) ist entbehrlich, $u_1 = 0,\ u_2 = r,\ r \in \mathbb{R}$.

Ergebnis: Eigenvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit Vielfachen) mit $\vec{u}' = \vec{u}$ und $r \in \mathbb{R}$.

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} (1-k)u_1 & +u_2 = 0 \\ u_1 + (-1-k)u_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Bedingung: Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)(-1-k) - 1 = 0$

Dies führt auf $k^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ (Eigenwerte)

Eigenvektoren zu $k_1 = \sqrt{2}$ $\quad \left\{ \begin{matrix} (1-\sqrt{2})u_1 & +u_2 = 0 & (1) \\ & u_1 + (-1-\sqrt{2})u_2 = 0 & (2) \end{matrix} \right\}$

Nun muss man folgenden Trick wissen: Erstens muss klar sein, dass auf Grund der charakteristischen Gleichung eine Gleichung entbehrlich sein muss. Dann aber muss man z. B. in (1) die Wurzel vor u_1 „wegbringen". Jetzt kommt der zweite Trick.

Die dritte binomische Formel hilft hier, denn $(1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$!!

Also wird man (1) mit $(1-\sqrt{2})$ multiplizieren. Dadurch entsteht dieses System:

$$\left\{ \begin{matrix} \underbrace{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}_{-1} u_1 + (1+\sqrt{2})u_2 = 0 & (1) \\ u_1 - (1+\sqrt{2})u_2 = 0 & (2) \end{matrix} \right\}$$

bzw. $\quad \left\{ \begin{matrix} -u_1 + (1+\sqrt{2})u_2 = 0 & (1) \\ u_1 - (1+\sqrt{2})u_2 = 0 & (2) \end{matrix} \right\}$

Dann erkennt man, das (1) das Negative von (2) ist, und somit ist diese Gleichung entbehrlich. Also kann man z. B. u_2 frei wählen, etwa $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R}$.

Dann folgt aus (2): $\quad u_1 = (1+\sqrt{2})r$

Lösungsvektoren: $\quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx r\begin{pmatrix} 2{,}14 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1\,' = \sqrt{2} \cdot \vec{u}_1$.

Eigenvektoren zu $k_2 = -\sqrt{2}$: $\quad \left\{ \begin{matrix} \underbrace{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}_{-1} u_1 + (1-\sqrt{2})u_2 = 0 & (3) \\ u_1 + (-1+\sqrt{2})u_2 = 0 & (4) \end{matrix} \right\}$

Ich habe dabei bereits in (3) die Multiplikation mit $(1-\sqrt{2})$ durchgeführt, was zu

$\left\{ \begin{matrix} -u_1 + (1-\sqrt{2})u_2 = 0 & (1) \\ u_1 - (1-\sqrt{2})u_2 = 0 & (2) \end{matrix} \right\}$ führt.

Dann erkennt man, dass (1) das Negative von (2) ist, und somit ist diese Gleichung entbehrlich. Also kann man z. B. u_2 frei wählen, etwa $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R}$.

Dann folgt aus (2): $\quad u_1 = (1-\sqrt{2})r$

Lösungsvektoren: $\quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx r\begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2\,' = -\sqrt{2} \cdot \vec{u}_2$

Ergebnis: Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ mit allen Vielfachen,

wobei gilt: $\vec{u}_1\,' = \sqrt{2} \cdot \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2\,' = -\sqrt{2} \cdot \vec{u}_2$.

Lösungen Aufgabe 8

(1) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\vec{x}$ mit $t \neq -1$ (2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & t \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ (3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x}$

a) Bestimme die Anzahl der Eigenwerte in Abhängigkeit von t.

b) Bestimme im Falle nur eines Eigenwertes die Eigenvektoren.

c) Bestimme den 2. Eigenwert, wenn der andere -1 ist.

(1) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\vec{x}$ mit $t \neq -1$ EWS: $\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ -1 & t-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (1-k)u_1 & +u_2 = 0 \\ -u_1 + (t-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -1 & t-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k)(t-k)+1=0 \Leftrightarrow k^2-(t+1)k+(t+1)=0$$

$$k_{1,2} = \frac{(t+1) \pm \sqrt{(t+1)^2 - 4(t+1)}}{2} = \frac{(t+1) \pm \sqrt{t^2-2t-3}}{2} \qquad (*)$$

Vorzeichenuntersuchung des Radikanden t^2-2t-3:

Die Hilfsfunktion $R(t) = t^2-2t-3$ hat als Schaubild eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$.

Zwischen diesen Nullstellen hat R(t) negative Werte, d. h. für $-1 < t < 3$ hat (*) keine Lösungen, gibt es keine Eigenwerte und auch keine Eigenvektoren.

Für $t_1 = 3$ und $t_2 = -1$ hat (*) jeweils nur eine Lösung, d.h. gibt es genau 1 Eigenwert.

Für $t < -1$ oder $t > 3$ ist der Radikand positiv, also gibt es dann aus (*) genau 2 Eigenwerte.

b) **Eigenvektoren im Fall** $t_1 = 3$: Aus (*) folgt dann $k = \frac{t+1 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$.

Eigenvektoren sind dann Lösungen des Systems $\begin{Bmatrix} -u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix}$. Da eine Gleichung entbehrlich ist, kann man z. B. u_1 frei wählen: $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = u_1 = r$.

Eigenvektoren sind dann $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei gilt: $\vec{u}' = 2 \cdot \vec{u}$.

Eigenvektoren im Fall $t_2 = -1$**:** Aus (*) folgt dann $k = \frac{t+1 \pm \sqrt{0}}{2} = 0$. Dies scheidet jedoch aus, denn $\vec{u}' = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$ ist nicht brauchbar. (Aus diesem Grund war t = -1 ausgeschlossen!)

c) Nun sei $k_1 = -1$. Aus $k^2-(t+1)k+(t+1)=0$ folgt damit $1+(t+1)+(t+1)=0 \Leftrightarrow 2t=-3$

also $t = -\frac{3}{2}$. Aus (*) erhält man dann $k_2 = \frac{\left(-\frac{3}{2}+1\right) \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 3}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 = k_1 \end{cases}$.

Der zweite Eigenwert ist dann $k_2 = -\frac{1}{2}$

(2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & t \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ EWS: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-k & t \\ -2 & 1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \left(-\frac{1}{3}-k\right)u_1 + t \cdot u_2 = 0 \\ -2u_1 + (1-k)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}-k & t \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}-k\right)(1-k) + 2t = 0 \Leftrightarrow k^2 - \frac{2}{3}k + \left(2t - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad | \cdot 3$$

$$3k^2 - 2k + (6t-1) = 0 \quad \text{mit} \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12 \cdot (6t-1)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16-72t}}{6}$$

Vorzeichenuntersuchung des Radikanden $16-72t$:

Er ist positiv für $16 - 72t > 0 \Leftrightarrow -72t > -16 \Leftrightarrow t < \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$. Dann gibt es 2 Eigenwerte.

Er wird 0 für $t = \frac{2}{9}$. Dann gibt es genau einen Eigenwert.

Er wird negativ für $t > \frac{2}{9}$, dann besitzt die Matrix keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren.

b) Eigenvektoren im Fall $t = \frac{2}{9}$: Aus (*) folgt dann $k = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{1}{3}$.

Eigenvektoren sind dann Lösungen des Systems $\begin{Bmatrix} -\frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{9}u_2 = 0 \\ -2u_1 + \frac{2}{3}u_2 = 0 \end{Bmatrix}$.

Die erste Gleichung entsteht aus der zweiten durch Division durch 3, ist also entbehrlich.

Daher kann man z. B. u_1 frei wählen: $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 3r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 3r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, wobei gilt: $\vec{u}' = \frac{1}{3} \cdot \vec{u}$

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$ Berechnung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} t-k & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (t-k)u_1 - \frac{3}{4} \cdot u_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}u_1 + \left(\frac{1}{2}-k\right)u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} t-k & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t-k)\left(\frac{1}{2}-k\right) - \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow k^2 - \left(\frac{1}{2}+t\right)k + \left(\frac{1}{2}t - \frac{9}{8}\right) = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2k^2 - (2t+1)k + \left(t - \frac{9}{4}\right) = 0 \quad (*)$$

$$k_{1,2} = \frac{(2t+1) \pm \sqrt{(2t+1)^2 - 8\left(t - \frac{9}{4}\right)}}{4} = \frac{(2t+1) \pm \sqrt{4t^2 + 4t + 1 - 8t + 18}}{4} = \frac{(2t+1) \pm \sqrt{4t^2 - 4t + 19}}{4}$$

Vorzeichenuntersuchung des Radikanden $4t^2 - 4t + 19$:

Die Hilfsfunktion $R(t) = 4t^2 - 4t + 19$ hat als Schaubild eine nach oben geöffnete Parabel

ohne Nullstellen, denn sie wären bei $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 19}}{2} \notin \mathbb{R}$.

Also hat der Radikand nur positive Werte, d. h. dass es für jedes t genau zwei Eigenwerte gibt.

b) entfällt also.

c) Wenn k_1 = -1 ist, erhält man aus (*) $2 + (2t+1) + \left(t - \frac{9}{4}\right) = 0$, was zu $3t + \frac{3}{4} = 0$, also $t = -\frac{1}{4}$ führt. Dazu berechnet man dann den Eigenwert:

$$k_{1,2} = \frac{\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right) \pm \sqrt{4 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 19}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 19}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}}{4} = \begin{cases} \frac{5}{4} = k_2 \\ (-1 = k_1) \end{cases}$$

Lösungen Aufgabe 9

a) $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Zeige, dass die Matrix keinen Eigenwert besitzt.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} a-k & -b \\ b & a-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung $\begin{vmatrix} a-k & -b \\ b & a-k \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-k)^2+b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-k)^2=-b^2$

Da $b \neq 0$ ist die rechte Seite negativ.

Da ein Quadrat nicht negativ werden kann, hat diese Gleichung keine Lösung.

Also gibt es keine Eigenwerte und folglich auch keine Eigenvektoren.

b) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Zeige, dass die Matrix zwei Eigenwerte besitzt.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} a-k & b \\ b & a-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung $\begin{vmatrix} a-k & b \\ b & a-k \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-k)^2-b^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-k)^2=b^2$

Daraus folgt: $|a-k|=|b|$

bzw. $a-k=\pm|b|$

$k_{1,2}=a\pm|b|$

Da $b \neq 0$ sind diesen beiden Eigenwerte verschieden.

6 Fixgeraden von affinen Abbildungen

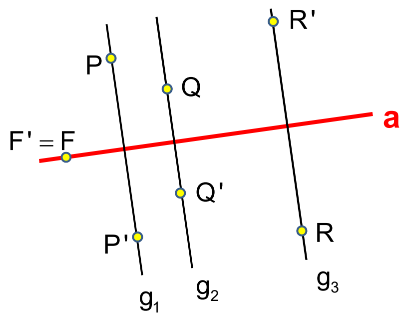
6.1 Wichtige Theorie

Als **Fixgerade** bezeichnet man eine Gerade, die durch die gegebene Abbildung als Punktmenge fest bleibt. Das bedeutet, dass jeder Punkt einer Fixgeraden einen Bildpunkt hat, der wieder auf dieser Geraden liegt. Eine Fixgerade besteht aber nicht unbedingt aus Fixpunkten. Wenn eine Fixgerade aber aus lauter Fixpunkten besteht, dann nennt man sie auch **Fixpunktgerade** oder Achse.

Am Beispiel der Achsenspiegelung kennt das jeder:

(1) (1) Die Achse a, an der gespiegelt wird, besteht nur aus Fixpunkten: Z. B. $F' = F$. Sie ist eine **Fixpunktgerade**.

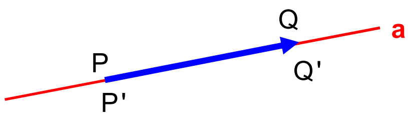
(2) Jeder zur Achse senkrechte Gerade (g_1, g_2, g_3, …) sind „einfache" Fixgeraden. Ihre Punkte werden durch die Spiegelung „auf die andere Seite von a" gespiegelt, ändern also ihre Position, bleiben aber auf der Geraden. M(mit Ausnahme der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Achse: Sie sind ja Fixpunkte.)



Auf Grund der Überlegungen des letzten Abschnitts können Fixgeraden nur die Richtung von Eigenvektoren haben. Das heißt, wenn eine affine Abbildung keine Eigenvektoren besitzt, dann gibt es auch keine Fixgeraden.

Betrachten wir zuerst die Fixpunktegeraden.

Es seien P und Q zwei FixPpunkte einer Fixpunktgeraden.
P und Q sind also Fixpunkte. Dann gilt natürlich $P' = P$
und $Q' = Q$.



Also folgt für den Vektor $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$.
Schreibt man das so: $\overrightarrow{P'Q'} = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{PQ}$, dann wird klar:
Dieser Vektor ist ein Eigenvektor der Abbildung und zwar mit dem Eigenwert 1.

Man kann sich daher merken:

> Zu einer <u>Achse</u> (Fixpunktgeraden) gehört stets als Richtungsvektor ein Eigenvektor mit dem <u>Eigenwert 1</u>.

Wir untersuchen nun, wie man die Fixgeraden findet. Dazu muss man zuerst die Fixpunkte der affine Abbildung bestimmen.

Wir beweisen noch zwei wichtige Sätze, bevor es mit den zahlreichen Beispielen losgeht.

Satz 1:

Eine Gerade, die durch einen Fixpunkt geht und die Richtung eines Eigenvektors hat, ist eine Fixgerade.

Beweis: Die Abbildung sei $\alpha: \ \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{c}$

F sei ein Fixpunkt von α und $\vec{u}$ ein Eigenvektor mit dem Eigenwert k.

Es gilt also: $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$.

g sei die gegebene Gerade durch F in Richtung $\vec{u}$:

$$\vec{x} = \vec{f} + r \cdot \vec{u}$$

Dann hat die Bildgerade diese Gleichung:

$$\vec{x}' = A \cdot \left(\vec{f} + r\vec{u}\right) + \vec{c}$$

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{f} + A \cdot (r\vec{u}) + \vec{c}$$

$$\vec{x}' = \left(A \cdot \vec{f} + \vec{c}\right) + r \cdot (A\vec{u}) \qquad (*)$$

Weil F Fixpunkt ist, gilt: $\vec{f}' = A \cdot \vec{f} + \vec{c} = \vec{f}$

und für die Vektorabbildung gilt: $\vec{u}' = A\vec{u} = k\vec{u}$ weil $\vec{u}$ Eigenvektor ist.

Damir folgt aus (*):

$$g': \quad \vec{x}' = \vec{f} + r \cdot (k\vec{u})$$

Damit hat g' denselben Aufpunkt wir g und eine Vielfaches des Richtungsvektors.

Also ist $g = g'$, also eine Fixgerade.

Satz 2:

Der Schnittpunkt zweier Fixgeraden ist ein Fixpunkt.

Beweis:

g_1 und g_2 seien Fixgeraden und ihr Schnittpunkt sei F.

Weil g_1 eine Fixgerade, also liegt der Bildpunkt F' von F auch auf g_1.

Weil g_2 eine Fixgerade, also liegt der Bildpunkt F' von F auch auf g_2.

Also liegt F' auf g_1 und auf g_2, ist also mit dem Schnittpunkt F identisch.

Da $F' = F$ ist, muss F ein Fixpunkt sein.

6.2 Affine Abbildungen mit einer Fixpunktgeraden (Achse)

Wissen: Eine **Achsenaffinität** hat stets einen Eigenvektor mit dem Eigenwert 1.

1. Fall: Hat die Abbildung einen zweiten Eigenwert (ungleich 1), dann hat sie **durch jeden Fixpunkt in Richtung des zweiten Eigenvektors eine Fixgerade. Sie verläuft in Abbildungsrichtung: Parallelstreckung.**

2. Fall: Hat die Abbildung keinen zweiten Eigenwert (ungleich 1), dann heißt sie **Scherung**. Sie hat dann alle **Geraden parallel zur Achse als Fixgeraden.**

Ich zeige fünf Beispiele:
- B1: Eine (orthogonale) Achsenspiegelung (Spezialfall der Parallelstreckung)
- B2: Eine Parallelstreckung
- B3: Affinspiegelung (Schrägspiegelung, Spezialfall der Parallelstreckung)
- B4 und B5: Scherungen

Beispiel 14

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

Achsenspiegelung

Fixpunkte $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0{,}4x - 0{,}8y = -2{,}4 \\ -0{,}8x + 1{,}6y = 4{,}8 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Gleichung (2) ist das (-2)-fache von (1), also keine neue Bedingung. Fixpunkte sind somit alle, die (1) erfüllen. (1) stellt die Gerade $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + 3}$ dar. Sie ist die **Achse**.

Die Spiegelung von F_1 an a ergibt wieder F1.

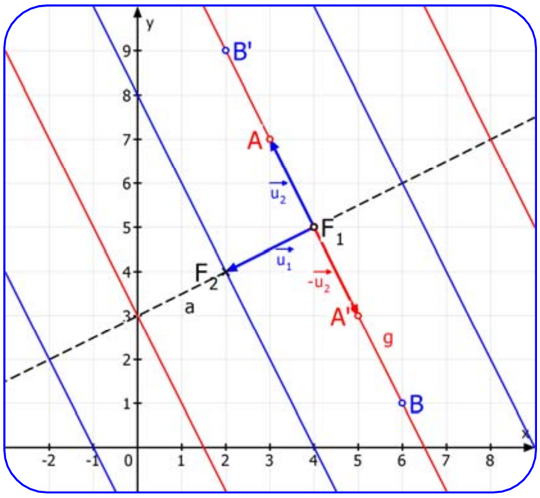


Abbildung von $A(3|7)$ und $B(6|1)$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 + 5{,}6 - 2{,}4 \\ 2{,}4 - 4{,}2 + 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 + 0{,}8 - 2{,}4 \\ 4{,}8 - 0{,}6 + 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $A'(5|3)$ und $B'(2|9)$.

Bei Achsenaffinitäten kann man die Abbildungsrichtung (Affinitätsrichtung) auf zwei Arten finden:

1. Möglichkeit: Berechnung von $\overrightarrow{PP'}$:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \right] - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

Trick: Geschickt ausklammern: $= x\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} - 2y\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = (x - 2y + 6)\begin{pmatrix} \mathbf{-0{,}4} \\ \mathbf{0{,}8} \end{pmatrix}$.

Die Richtung von $\overrightarrow{PP'}$ ist also die von $\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ bzw. von $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für Punkte der Achse wird übrigens $(x - 2y + 6)$ Null. Dann folgt $\overrightarrow{PP'} = \vec{o}$.

2. Möglichkeit: Berechnung der Fixgeraden mittels Eigenvektoren:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 0{,}6-k & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 0{,}6-k & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0{,}6-k)(-0{,}6-k) - 0{,}64 = 0$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \pm 1$

Berechnung der Eigenvektoren:

EWS für k = 1: $\begin{pmatrix} 0{,}6-1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -0{,}4u_1 + 0{,}8u_2 = 0 \\ 0{,}8u_1 - 1{,}6u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (2) ist entbehrlich.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$ Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$.

EWS für k = -1: $\begin{pmatrix} 0{,}6+1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} 1{,}6\,u_1 + 0{,}8u_2 = 0 \\ 0{,}8u_1 + 0{,}4u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (1) ist entbehrlich.

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$ Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2$.

Ergebnisse: Der Eigenvektor $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert 1 gibt die Achsenrichtung an.

Der Eigenvektor $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert -1 gibt die Affinitätsrichtung an, also die Richtung der Fixgeraden. (Siehe Graphik.)

Wegen $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ sind diese Vektoren orthogonal.

Also wird senkrecht zur Achse abgebildet.

Und da $\overrightarrow{F_1A'} = -\overrightarrow{F_1A}$ ist, liegt eine **Achsenspiegelung** vor. (Siehe Graphik).

Ein weiteres Merkmal ist folgendes:

Wenn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ist und $\vec{a}\vec{b} = 0$ ist, liegt eine Kongruenzabbildung vor. Wenn dann noch $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ ist und eine Achse vorhanden ist, dann haben wir eine orthogonale Spiegelung.

Beispiel 15: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x = x - y \\ y = 2y \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix}:$

Die x-Achse ist also Fixpunktgerade.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

Dies ergibt $(1-k)(2-k) = 0 \iff k_1 = 1$ und $k_2 = 2$ (Eigenwerte)

Eigenvektoren für $k_1 = 1$: Aus (*) folgt: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \iff \begin{Bmatrix} -u_2 = 0 \\ u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Demnach ist u_1 beliebig, also $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R}$ und $u_2 = 0$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren für $k_2 = 2$: Aus (*) folgt: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \iff \begin{Bmatrix} -u_1 - u_2 = 0 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{Bmatrix}$

Da (4) entbehrlich ist, kann man z. B. $u_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$ wählen.

Aus (3) folgt dann $u_1 = -u_2 = -s$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ergebnis: Eigenvektoren sind alle Vielfachen von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$

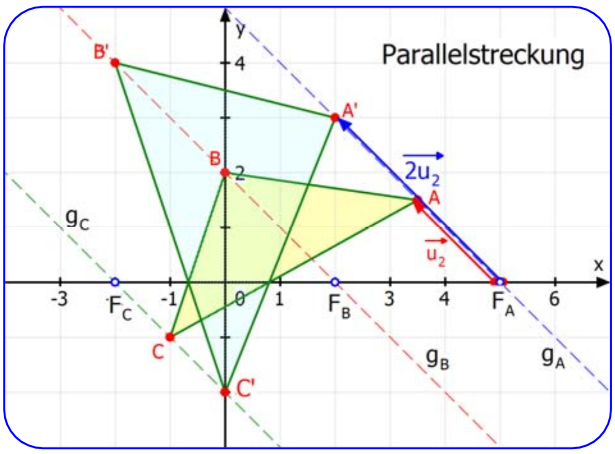
und von $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = 2 \cdot \vec{u}_2$.

Fixgeraden sind neben der Achse noch alle Geraden in Richtung $\vec{u}_2$ (also durch jeden Punkt der Achse = Fixpunkt): $y = -x + n,\ n \in \mathbb{R}$

Die Zeichnung zeigt, wie jeder Punkt, der nicht auf der Achse liegt, in Richtung von $\vec{u}_2$ mit dem Faktor 2 (= Eigenwert k_2) gestreckt wird: $\overline{F_A A'} = 2\overline{F_A A}$.

Daher der Name „***Parallelstreckung***".

Eingezeichnet sind drei Fixgeraden g_A, g_B, g_C und ihre Schnittpunkte mit der Achse: F_A, F_B und F_C sind Fixpunkte.



Zu den Achsenaffinitäten gibt es den Spezialtext 21320.
Dort erfährt man auch, auf welch einfache Art man Bildpunkte und Bildgeraden konstruieren kann.

Beispiel 16: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ Schrägspiegelung

Fixpunkte: Bed.: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = x - y \\ y = 2y \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} y = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$:

Die x-Achse ist also Fixpunktgerade.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (*)

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0$ d. h. $(1-k)(-1-k) = 0$

Eigenwerte: $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$

Eigenvektoren für $k_1 = 1$: Aus (*) folgt: $\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2u_2 = 0 \\ -2u_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

Also wird $u_2 = 0$. u_1 ist frei wählbar: $u_1 = r \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenvektoren für $k_1 = -1$: Aus (*) folgt: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Das führt zu $u_1 + u_2 = 0$ bzw. $u_2 = -u_1$. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Eigenvektoren: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$.

Fixgeraden: 1. Die x-Achse ist Fixpunktgerade,

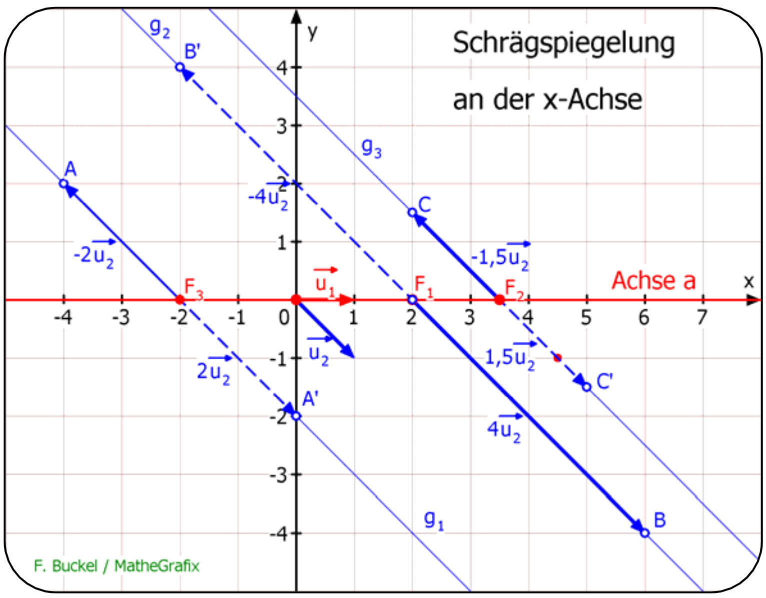
2. Alle Geraden in Richtung $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $y = -x + n,\ n \in \mathbb{R}$

Die Affinitätsrichtung ist die von $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, und wegen $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$ liegt eine Schrägspiegelung vor.

In der Zeichnung sind g_1, g_2 und g_3 Fixgeraden in Spiegelungsrichtung.

A, B und C werden an der x-Achse schräg in Richtung $\vec{u}_2$ gespiegelt.

Die Spiegelung entsteht dadurch, dass z. B. $\overrightarrow{FA}$ abgebildet wird zu $\overrightarrow{FA'} = -\overrightarrow{FA}$. Dadurch liegt A' auf der anderen Seite von F wie A.



Beispiel 17: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Scherung.

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = -2x \quad\quad + 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = \quad x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ 0 = -2x - \quad y + 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (2) das (-2)-fache von (1) ist, stellt (2) keine neue Bedingung dar.
Also sind alle Punkte, die (1) lösen, Fixpunkte.

α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse): $\boxed{y = -2x + 1}$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 2-k & 0{,}5 \\ -2 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 0{,}5 \\ -2 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(2-k) + 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1$ Doppelte Lösung.

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} 2-1 & 0{,}5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 + 0{,}5u_2 = 0 \\ -2u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

(2) ist ein Vielfaches von (1), also ist (1) entbehrlich. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

Oder: Bestimmung der Abbildungsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PP'} = 2x\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = (2x + y - 1)\cdot\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

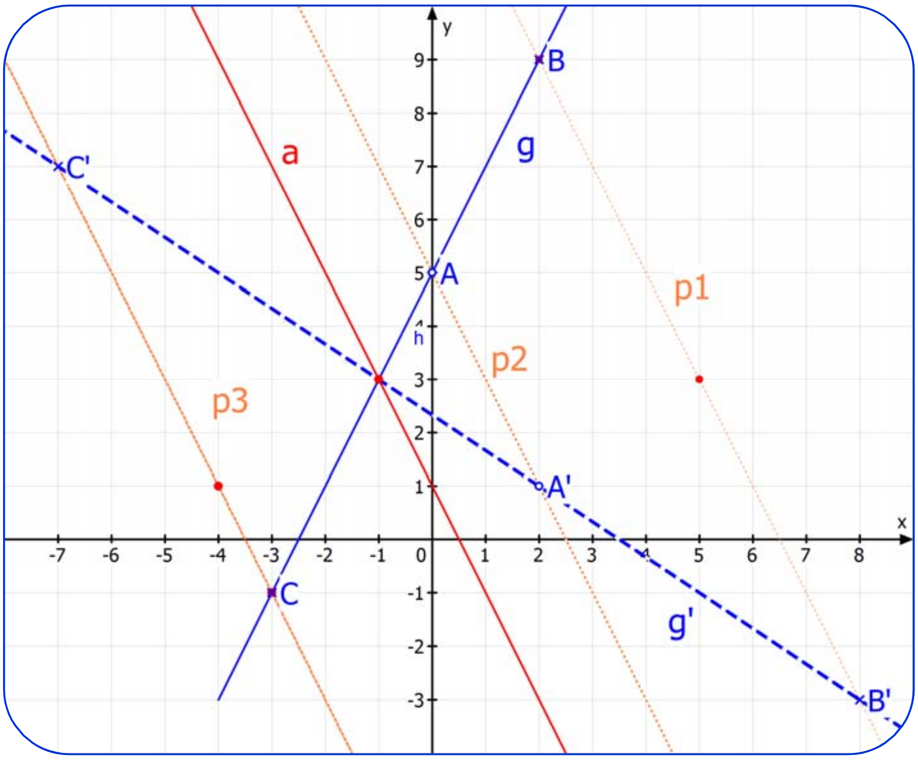
Wenn $2x + y - 1 \neq 0$ ist, also wenn P nicht auf der Fixpunktgeraden liegt, dann ist $\overrightarrow{PP'} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: $\boxed{y = -2x + 1}$
2. Da α nur einen Eigenvektor hat, muss man mit der Methode Seite 30 untersuchen, ob es noch weitere Fixgeraden in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gibt.

Diese spezielle affine Achsenaffinität mit nur einem Eigenvektor heißt **Scherung.**

Details zu dieser Scherung



Fixpunktgerade (Achse): a: $y = -2x + 1$

Fixgeraden p_1, p_2, p_3 **Alle Parallelen zur Achse.**

Punktabbildung: $A(0\,|\,5) \xrightarrow{\alpha} A'(2\,|\,1)$, denn $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wenn man $B(2\,|\,9)$ abbilden möchte, kann man mittels A und A' den **Bildpunkt konstruieren:**

Da man A und A' kennt, zeichnet man die Geraden g = (AB) ein.

Diese schneidet die Achse a im Fixpunkt $F(-1\,|\,3)$.

Die Bildgerade g' geht durch die Bildpunkte A' und $F' = F$.

Nun ist bekannt, dass bei der Scherung jede Parallele zur Achse eine Fixgerade ist.

Also ist die Gerade p_1 durch B, parallel zu a, eine Fixgerade, auf der also auch B' liegen muss.

B' ist daher der Schnittpunkt von g' und p_1.

Analog dazu wurde der Bildpunkt von $C(-3\,|\,-1)$ konstruiert.

Beobachtung: Die Abbildungsrichtung ist in dieser Halbebene von a entgegengesetzt wie in der anderen Halbebene, in der A und B liegen.

Beispiel 18: Zum 2. Fall: $\alpha: \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{matrix} x = \frac{3}{2}y \\ y = -\frac{2}{3}x + 2y \end{matrix} \right\} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{matrix} x - \frac{3}{2}y = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}x - y = 0 & (2) \end{matrix} \right\}$

(1) und (2) führen auf $y = \frac{2}{3}x$: Fixpunktgerade (Affinitätsachse).

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 0-k & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -k & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2-k \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ -k(2-k) + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$ Doppelte Lösung.

Ergebnis: α hat eine Achse und nur den Eigenwert 1. Also ist α eine **Scherung.**

Eigenvektoren: Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{matrix} -u_1 + \frac{3}{2}u_2 = 0 & (3) \\ -\frac{2}{3}u_1 + u_2 = 0 & (4) \end{matrix} \right\}$

(4) ist das $\frac{2}{3}$ – fache von Gleichung (2), stellt also keine neue Bedingung dar.

Ich wähle $u_1 = 3r, r \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ -\frac{2}{3} \cdot 3r + u_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ u_2 = 2r$

Lösungsvektor (Eigenvektor): $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

Dieser Eigenvektor hat die gleiche Richtung wie die Affinitätsachse, was typisch für die Scherung ist.

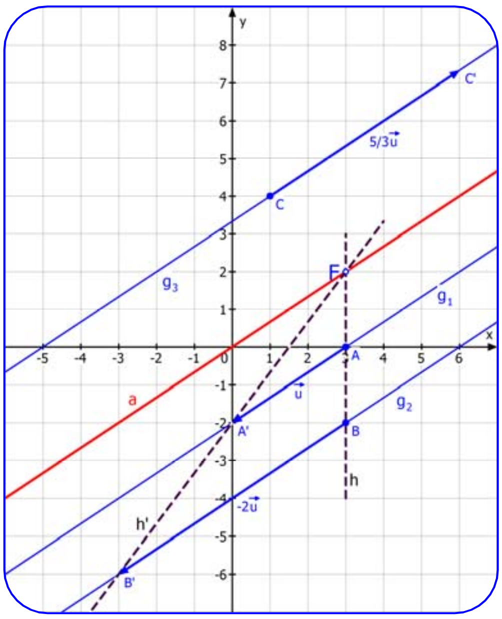
Oder: Bestimmung der Abbildungsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right] - \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wenn also $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \neq 0$ ist, also $y \neq \frac{2}{3}x$, wenn also $P \notin a$, dann ist $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fixgeraden: Die Achse und alle Parallelen zur Achse : $y = \frac{2}{3}x + n, \ n \in \mathbb{R}$

Details: Alle Punkte der Achse a sind Fixpunkte.



Alle Parallelen zu a sind Fixgeraden: g_1, g_2, g_3 usw.
Wenn z. B. A und A‘ bekannt sind, kann man zu B den Bildpunkt konstruieren:

Die Gerade h = (FAB) wird abgebildet in $h' = (FA')$. Darauf liegt auch B'.

Andererseits weiß man, dass jeder Punkt, also auch B parallel zur Achse „geschert“ wird. Die Parallele zu a durch B schneidet h' in B'.

6.3 Affine Abbildungen mit genau einem Fixpunkt.

Siehe Text 21230

1. Fall: **Wenn α genau einen Fixpunkt F hat und verschiedene Eigenwerte hat, also zwei linear unabhängige Eigenvektoren, dann heißt sie Euler-Affinität und die beiden Geraden durch F in Richtung der Eigenvektoren sind Fixgeraden**

Beispiel 19: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Diese Abbildung heißt ***EULER-Affinität***.

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = y + 3 \\ y = 2x + y + 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = y + 3 \\ 0 = 2x + 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (2) erhält man $x_F = -\frac{1}{2}$, aus (1) folgt dazu $y_F = -\frac{7}{2} = -3{,}5$

α hat <u>einen</u> Fixpunkt: $F(-0{,}5 \mid -3{,}5)$.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(1-k) - 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -2u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 - u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Eine Gleichung ist entbehrlich. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = 2\vec{u}_1$

Eigenwertsystem zu $k_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Die zweite Gleichung ist entbehrlich. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$

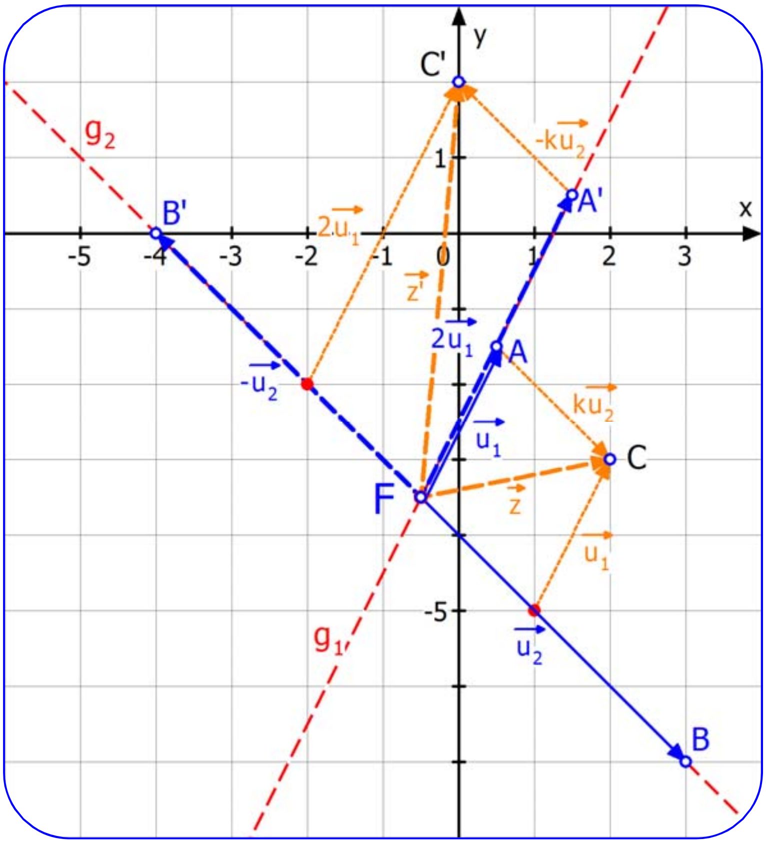
4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

Da α genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat, besitzt α zwei Fixgeraden:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 2x - 2{,}5$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -x - 4$

Details zu dieser Euler-Affinität



Fixpunkt: $F(-0{,}5 \mid -3{,}5)$

Fixgeraden: g_1: $y = 2x - 2{,}5$, g_2: $y = -x - 4$

Abbildung: **Auf g_1:** $A(0{,}5 \mid -1{,}5) \in g_1 \xrightarrow{\alpha} A'(1{,}5 \mid 0{,}5) \in g_1$

wobei $\overrightarrow{FA'} = 2 \cdot \overrightarrow{AF}$ Streckung mit dem Faktor 2.

Auf g_2: $B(3 \mid -7) \in g_2 \xrightarrow{\alpha} B'(-4 \mid 0) \in g_2$

wobei $\overrightarrow{FB'} = -\overrightarrow{FB}$ Spiegelung an F.

Punkte nicht auf den Fixgeraden : $C(2 \mid -3) \xrightarrow{\alpha} C'(0 \mid 2)$

Auf den Fixgeraden liegt jeweils eine Streckung mit dem betreffenden Eigenvektor vor.
Liegt ein Punkt wie C auf keiner der Fixgeraden, kann man sei **Bild so konstruieren**:

Man zerlegt der Vektor $\overrightarrow{FC}$ in eine Linearkombination aus den Eigenvektoren, in der Konstruktion reicht dazu ein Parallelogramm: $\overrightarrow{FC} = \vec{z} = \vec{u}_1 + \frac{3}{7}\vec{u}_2$ und bildet dieses ab. (In der Zeichnung steht $k\vec{u}_2$ statt $\frac{3}{7}\vec{u}_2$) So entsteht: $\overrightarrow{FC'} = \vec{z}' = \vec{u}_1' + \frac{3}{7}\vec{u}_2'$. Und wegen $\vec{u}_1' = 2\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$ hat man schnell das Bildparallelogramm mit der Ecke C'.

Hinweis: Weil bei dieser Euler-Affinität ein Eigenwert negativ ist wird der zugehörige Eigenvektor bei der Abbildung „umgekehrt“: $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$. Daher nennt man diesen Spezialfall **Spiegelstreckung**.

Beispiel 20: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ Diese Abbildung heißt ***EULER-Affinität***.

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1{,}5x + 3y = x \\ 0{,}5x + 2y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0{,}5x + 3y = 0 \\ 0{,}5x + \ \ y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Aus (1) – (2) erhält man $y = 0$, aus (2) folgt dazu $x = 0$.

α hat genau <u>einen</u> Fixpunkt: $F(0\,|\,0)$.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1{,}5-k & 3 \\ 0{,}5 & 2-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1{,}5-k & 3 \\ 0{,}5 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1{,}5-k)(2-k) - 1{,}5 = 0$

$k^2 - 3{,}5k + 1{,}5 = 0$ bzw. besser: $2k^2 - 7k + 3 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 1{,}5-3 & 3 \\ 0{,}5 & 2-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -1{,}5u_1 + 3u_2 = 0 \\ 0{,}5u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$ (3) ist das (-3)-fache von (4).

Wähle $u_1 = 2r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = r$:

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = 3\vec{u}_1$.

Eigenwertsystem zu $k_2 = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1{,}5-0{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 2-0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} u_1 + 3u_2 = 0 \\ 0{,}5u_1 + 1{,}5u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$ (5) ist das Doppelte von (4).

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = -3r$:

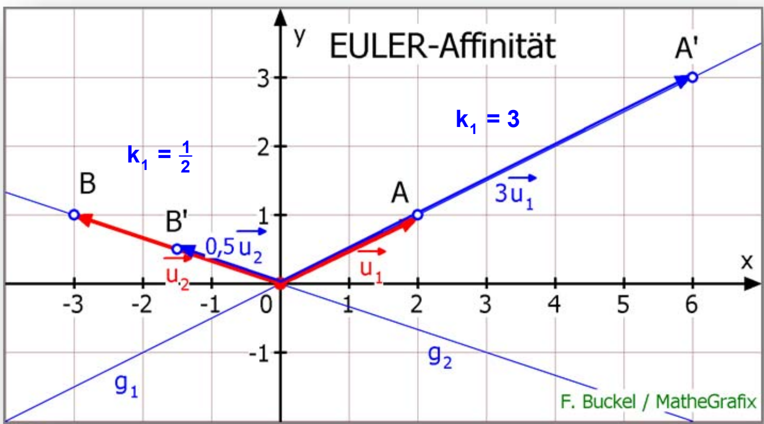
Eigenvektoren sind $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = \frac{1}{2}\vec{u}_2$.

Fixgeraden:

Da α genau einen Fixpunkt $O(0\,|\,0)$ und zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat, besitzt α genau zwei Fixgeraden:

g_1: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$ und

g_2: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -\frac{1}{3}x$



Auf g_1 wird mit $k_1 = 3$ gestreckt, auf g_2 wird mit $k_2 = \frac{1}{2}$ gestaucht….

2. Fall: **Wenn α genau einen Fixpunkt F hat und einen Eigenwert hat, und alle Vektoren Eigenvektoren sind, dann sind alle Geraden durch F Fixgeraden: Zentrische Streckung.**

Beispiel 21: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ d. h. $\vec{x}' = 2\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$!!!

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2x+2 \\ y = 2y-4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -2 \\ y = 4 \end{Bmatrix}$$

α besitzt den Fixpunkt $F(-2\,|\,4)$.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-k)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ Eigenwert

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu k = 2: $\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0u_1 + 0u_2 = 0 \\ 0u_1 + 0u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Jeder Vektor erfüllt dieses Gleichungssystem, ist daher Eigenvektor

Eigenvektoren sind daher alle Vektoren $\vec{u}$, und es gilt $\vec{u}' = 2\vec{u}$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

Alle Geraden durch den Fixpunkt $F(-2\,|\,4)$ sind Fixgeraden.

Untersuchung dieser Abbildung:

Schreibt man die Abbildungsgleichung so: $\vec{x}' = 2\vec{x} - \vec{f}$, mit $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

dann folgt: $\overrightarrow{FP} = \vec{x} - \vec{f}$

und $\overrightarrow{FP'} = \vec{x}' - \vec{f} = \left(2\vec{x} - \vec{f}\right) - \vec{f} = 2\vec{x} - 2\vec{f}$

Also gilt: $\overrightarrow{FP'} = 2 \cdot \overrightarrow{FP}$

Das heißt jeder von F ausgehende Vektor wird auf das Doppelte gestreckt.

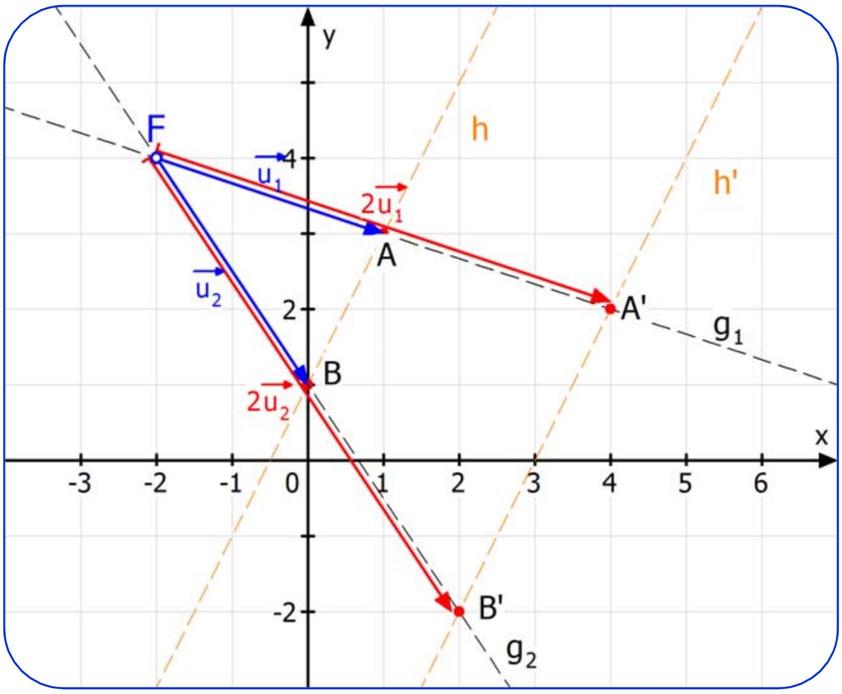
Die Abbildung heißt **zentrische Streckung**.

Umgekehrt folgt aus dem Ansatz $\overrightarrow{FP'} = 2 \cdot \overrightarrow{FP}$ auch die Abbildungsgleichung:

$$\Leftrightarrow \vec{x}' - \vec{f} = 2 \cdot \left(\vec{x} - \vec{f}\right) \Leftrightarrow \boxed{\vec{x}' = 2\vec{x} - \vec{f}}$$

Eigenschaften dieser zentrischen Streckung auf der nächsten Seite.

Eigenschaften der zentrischen Streckung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ d. h. $\vec{x}' = 2\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$



Für alle Punkte P der Zeichenebene gilt: $\overrightarrow{FP'} = 2 \cdot \overrightarrow{FP}$

d. h. sie werden von F aus mit dem Faktor k = 2 gestreckt:

Für jeden Ortsvektor gilt hier: $\vec{x} = \vec{f} + \overrightarrow{FP}$.

Die Abbildung macht daraus: $\vec{x}' = \alpha\left(\vec{f} + \overrightarrow{FP}\right) = \alpha\left(\vec{f}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{FP}\right) = \vec{f} + 2 \cdot \overrightarrow{FP}$,

denn F ist Fixpunkt, also ist $\alpha\left(\vec{f}\right) = \vec{f}$

Alle Geraden durch F sind Fixgeraden, wie g_1 und g_2.

g: $\vec{x} = \vec{f} + r \cdot \vec{v}$. Dann folgt: g': $\vec{x}' = \alpha\left(\vec{f} + r\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{f}\right) + r \cdot \alpha\left(\vec{v}\right) = \vec{f} + r \cdot 2\vec{v}$

Also geht g' auch durch F und ihr Richtungsvektor ist kollinear zu dem von g.

Das Bild einer Geraden h nicht durch F ist eine Parallele h'.

Denn: Es sei g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v}$, dann folgt g': $\vec{x}' = \alpha\left(\vec{a} + r\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{a}\right) + r \cdot \alpha\left(\vec{v}\right) = \underbrace{2\vec{a} - \vec{f}}_{\vec{a}'} + r \cdot \underbrace{(2\vec{v})}_{\vec{v}'}$

Also ist der Richtungsvektor der bildgeraden ein Vielfaches von dem der gegeben Geradem-

Beispiel 22: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Punktspiegelung an F**

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -x + 4 \\ y = -y + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = 1 \end{Bmatrix}$

α hat den einzigen Fixpunkt $F(2\,|\,1)$

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1-k & 0 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -1-k & 0 \\ 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-k)^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ **Eigenwert.**

Eigenvektoren: EWS für k = -1: $\begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also ist jeder Vektor Eigenwert mit $\vec{u}' = -\vec{u}$

Fixgeraden sind alle Geraden durch F.

Details zur Zeichnung:

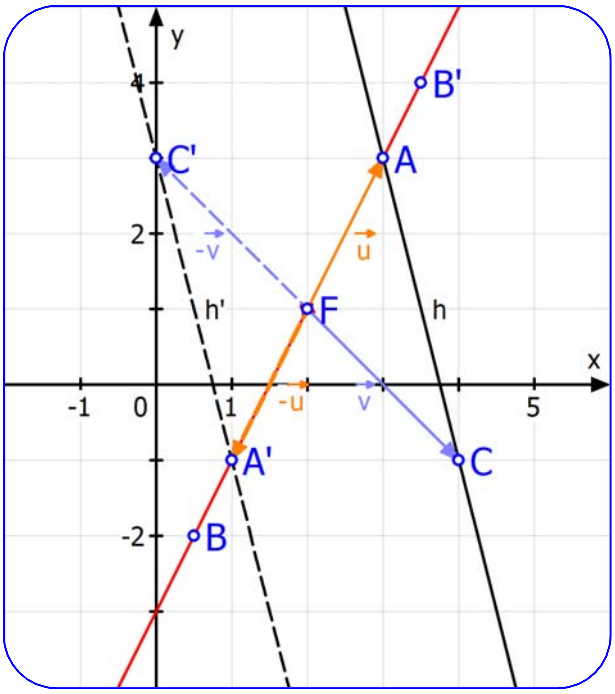
Fixpunkt der Punktspiegelung ist $F(2\,|\,1)$:

Zur Abbildung von A, B oder C wird jeweils der Vektor von F aus umgekehrt:

$\overrightarrow{FA'} = -\overrightarrow{FA}$ usw.

Jede gerade durch F ist Fixgerade, weil der Punkt und Bildpunkt auf dieser Geraden liegen.

Das Bild einer nicht durch F gehenden Geraden h ist eine Parallele zu h.



3. Fall: **Wenn α genau einen Fixpunkt F hat und keine Fixgerade,**
dann heißt sie Drehung oder Drehstreckung.

Beispiel 23: $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x}$ **Drehung um O**

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}y \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \end{Bmatrix} \begin{matrix} |\cdot\sqrt{3} \\ |\cdot 3 \end{matrix}$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}x = -\frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}\sqrt{3}x \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(1) + (2) ergibt: $2\sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x = 0$ und $y = 0$.

Der Ursprung ist einziger Fixpunkt.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-k & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-k & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-k\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-k\right)^2 = -\frac{3}{4}$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da ein Quadrat nicht negativ wird.

Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es also keine.

Wie identifiziert man dann diese Abbildung?

WISSEN über Drehungen:

Wenn sie diese Form $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\vec{x} + \vec{c}$ ***haben mit*** $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ***oder*** $\det(A) = 1$,

Dann liegt eine Drehung vor.

Die Abbildungsmatrix hat dann die Form $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Also ist α eine Drehung um den Ursprung mit einem Drehwinkel, für den gilt:

$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Daraus ergibt sich $\alpha = 60^O$. Siehe Seite 10 dieses Textes.

Eine weitere Drehung wird auf Seite 11 beschrieben
Es gibt auch einen Spezialtext für Drehungen und Verschiebungen: Text Nr. 21211

.

Beispiel 24: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ **Drehstreckung um F**

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -x-\sqrt{3}y+4+\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x - y + 2 - 2\sqrt{3} \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} 2x+\sqrt{3}y = 4+\sqrt{3} & |\cdot\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}x+2y = 2-2\sqrt{3} & |\cdot 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\sqrt{3}x+3y = 4\sqrt{3}+3 \\ -2\sqrt{3}x+4y = 4-4\sqrt{3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(1) + (2) ergibt: $7y = 7 \Rightarrow y_F = 1$

Damit erhält man $2x+\sqrt{3} = 4+\sqrt{3} \Rightarrow x_F = 2$

Einziger Fixpunkt: $F(2\,|\,1)$

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1-k & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -1-k & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-k)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (-1-k)^2 = -3$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da ein Quadrat nicht negativ wird.

Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es also keine.

Wie identifiziert man dann diese Abbildung?

Es ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1+3} = 2$ und $|\vec{b}| = 2$.

Außerdem ist $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$, d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal.

Also liegt eine Drehstreckung vor, d.h. eine Drehung um F mit anschließender zentrischer Streckung von F aus mit dem Faktor 2 oder -2.

(Übrigens kann man die Reihenfolge der Abbildungen vertauschen.)

Ausklammern von 2 führt zu: $\vec{x}' = 2\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (A1)

Ausklammern von-.2 führt zu: $\vec{x}' = -2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (A2)

Vergleicht man mit der Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, dann erhält man im Falle

A1: $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Aus den Vorzeichen folgert man, dass α ins 2. Feld führt,

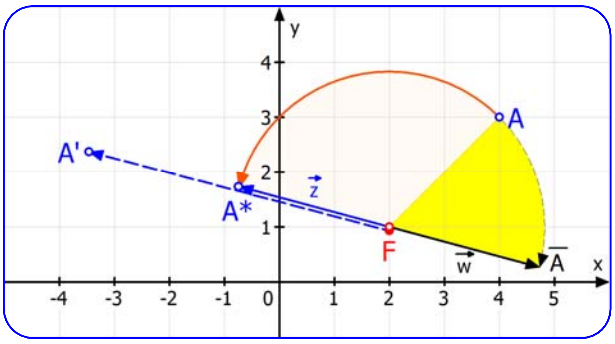
denn nur dort ist $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha < 0$.

Im 1. Feld wäre $\sin\alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha' = 60^O$:

Also gilt im 3. Feld: $\alpha = 180^O - \alpha = 120^O$.

Die Abbildung ist jetzt eine Drehung um F mit 240^O mit anschließender Streckung von F aus mit k = 2.

Zeichnung zur Drehstreckung.



$A(4|3)$ wurde um $F(2|1)$ um 120^O gedreht bis $A^* \approx (-0{,}732\,|\,1{,}732)$.

Dann folgte eine zentrische Streckung von F aus mit k = 2 bis $A' \approx (-3{,}46\,|\,2{,}46)$

Genaue Berechnung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-3\sqrt{3}+4+\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3}-3+2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3{,}46 \\ 2{,}46 \end{pmatrix}$

Interessant ist folgende Rechnung zur zentrischen Streckung:

$$\vec{z} = \overrightarrow{FP} = \vec{x} - \vec{f} = \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}\,' = \overrightarrow{FP'} = \vec{x}\,' - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun addiere ich die Nullsumme $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ und forme so um:

$$\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\underbrace{\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}_{\vec{z}} + \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{o}}$$

Ergebnis: $\vec{z}\,' = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{z} = 2\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\vec{u}$

Diese Gleichung verwendet also den Fixpunkt F als Ursprung für $\vec{z} = \overrightarrow{FP}$.

Im Falle A2: $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. führt α ins 4. Dort ist $\alpha = 360^O - 60^O = 300^O$ oder $\alpha = -60^O$. Die Abbildung ist jetzt eine Drehung um F mit -60^O mit anschließender Streckung von F aus mit k = -2.

Die Zeichnung enthält auch diesen Fall. Dort wird A im Uhrzeigersinn um 60° bis $\overline{A}(-5{,}46\,|\,1{,}464)$ gedreht. Dann folgt die Streckung (mit integrierter Spiegelung an F).

Der Bildpunkt A' ist natürlich derselbe.

4. Fall **Wenn α genau einen Fixpunkt F hat und genau eine Fixgerade, (bzw. genau einen Eigenwert ungleich 1) dann heißt sie Scherstreckung.**

Beispiel 25: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$

(a) **Berechnung der Fixpunkte:**

Fixpunkt-Bedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$ d. h. $\left\{ \begin{array}{ll} x = 2x + 3y & (1) \\ y = \phantom{2x+{}} 2y & (2) \end{array} \right\}$

bzw. $\left\{ \begin{array}{ll} 0 = x + 3y & (3) \\ 0 = \phantom{x+3{}} y & (4) \end{array} \right\}$

Es folgt: $y = 0$ und $x = 0$. **Einziger Fixpunkt** ist also $F(0\,|\,0)$.

(b) **Bestimmung der Fixgeraden:**

Eigenvektoren als nicht-triviale Lösungen von $\begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$.

Bedingung (Charakteristische Gleichung): $\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

d. h. $(2-k)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ (Eigenwert)

Eigenvektor dazu: $\begin{pmatrix} 2-2 & 3 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3u_2 = 0 & (5) \\ 0 = 0 & (6) \end{array} \right\}$

Da (6) keine Bedingung darstellt, gilt nur $u_2 = 0$

Damit ist u_1 beliebig: $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 2\vec{u}$.

Somit kann es nur Fixgeraden in Richtung von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geben.

Weil $F(0\,|\,0)$ Fixpunkt ist, kommt die x-Achse als Fixgerade in Frage.

Gibt es weitere Fixgeraden? Bedingung für eine Fixgerade ist:

$$\overrightarrow{PP'} = t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{x}' - \vec{x} = \left[x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = t \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Aus (2) folgt y = 0 und aus (1) x = t (also ist x beliebig). Fixgerade ist also die x-Achse.

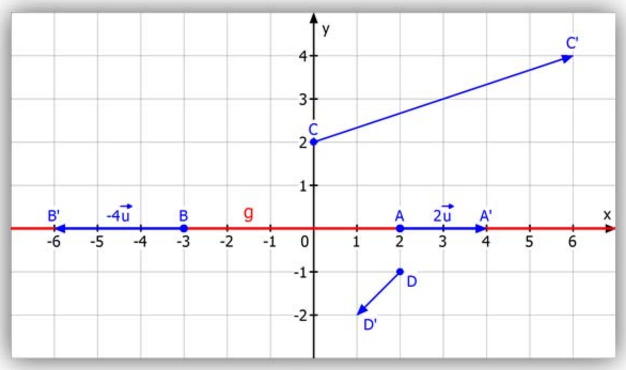
Beispielpunkte:

$A(2\,|\,0)$: $\vec{a}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A'(4\,|\,0)$

$B(-3\,|\,0)$: $\vec{b}' = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B'(-6\,|\,0)$

$C(0\,|\,2)$: $\vec{c}' = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $C'(6\,|\,4)$

$D(2\,|\,-1)$: $\vec{d}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $D'(1\,|\,-2)$



Die Richtungen von $\overrightarrow{CC'}$ und $\overrightarrow{DD'}$ stimmen nicht mit der des Eigenvektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ überein!

Beispiel 26: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{7}{2}x - 3y - 2 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{5}{2}x - 3y = 2 & \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 1 & |\cdot 6 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{5}{2}x - 3y = 2 \\ \frac{9}{2}x - 3y = 6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \qquad (2)-(1): \quad 2x = 4 \Rightarrow x_F = 2 \Rightarrow$ **F(2 | 1)**

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} - k & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{7}{2} - k & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} - k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2} - k\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$

Eigenwert: $k = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Eigenvektoren zu k = 2: $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} - 2 & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{Bmatrix} \frac{3}{2}u_1 - 3u_2 = 0 \\ \frac{3}{4}u_1 - \frac{3}{2}u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(1) ist das Doppelte von (2). Eine Gleichung ist also überflüssig.

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 2\vec{u}$.

Fixgerade ist die Gerade durch F in Richtung $\vec{u}$: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$

Beweis, dass es keine weiteren Fixgeraden gibt:

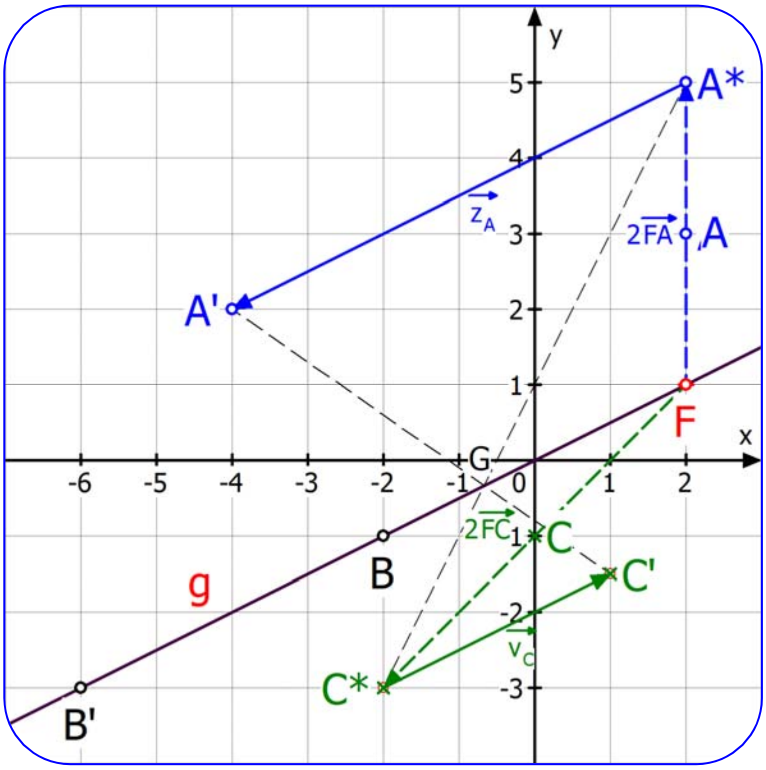
Bedingung für die Fixgerade: $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \vec{u}$ d. h. $\vec{x}' - \vec{x} = t \cdot \vec{u}$

d. h. $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{7}{2}x - 3y - 2 - x = 2t \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 1 - y = t \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} \frac{5}{2}x - 3y - 2 = 2t \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - 1 = t \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

Elimination von t durch $(2) - 2\cdot(4)$: $x - 2y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x}$ ist die einzige Fixgerade.

Graphische Darstellung dieser Scherstreckung



g ist die Fixgerade.

F ist der Fixpunkt auf g.

B liegt auf g, ist aber kein Fixpunkt.

Aber $\overrightarrow{FB}$ hat die Richtung des

Eigenvektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also gilt für ihn: $\overrightarrow{FB'} = 2 \cdot \overrightarrow{FB}$

B' liegt also auch auf g, da g ja Fixgerade ist.

A und C liegen nicht auf g.

Der Name Scherstreckung erklärt, wie A und C abgebildet werden:

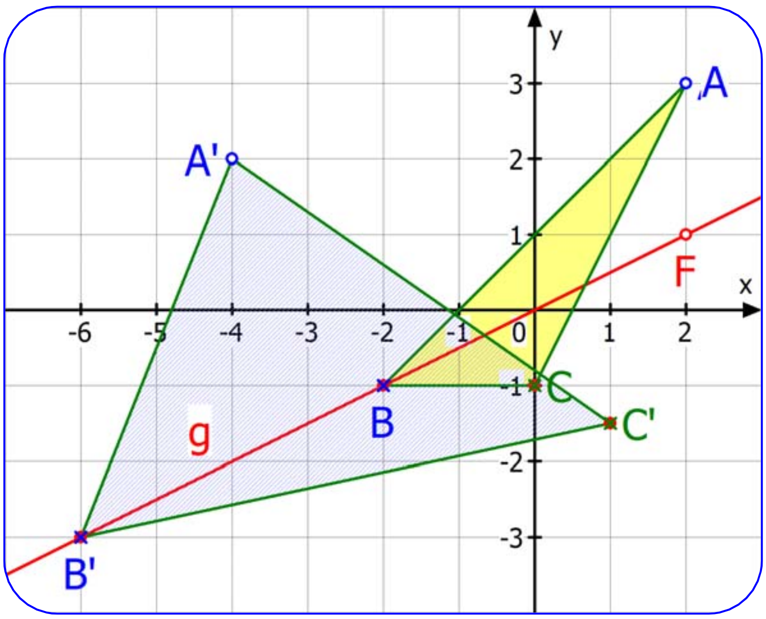
Zuerst erfolgt eine zentrische Streckung von F aus mit dem Streckfaktor k = 2 zu A^* bzw. C^*.

Dann erfolgt eine Scherung parallel zur Geraden g. C‘ konstruiert man mit Hilfe von A und A' so:

Die Gerade (A^*C^*) schneidet die Scherungsachse g in G. Ihre Bildgerade ist $(C'G)$. Diese schneidet die Parallele zu g durch A^* in A'.

Ein Konstruktionsverfahren wird im Text 21245 „Scherung und Scherstreckung“ beschrieben.

Hier nochmals dieselben Punkte als Dreiecke zusammengefasst.

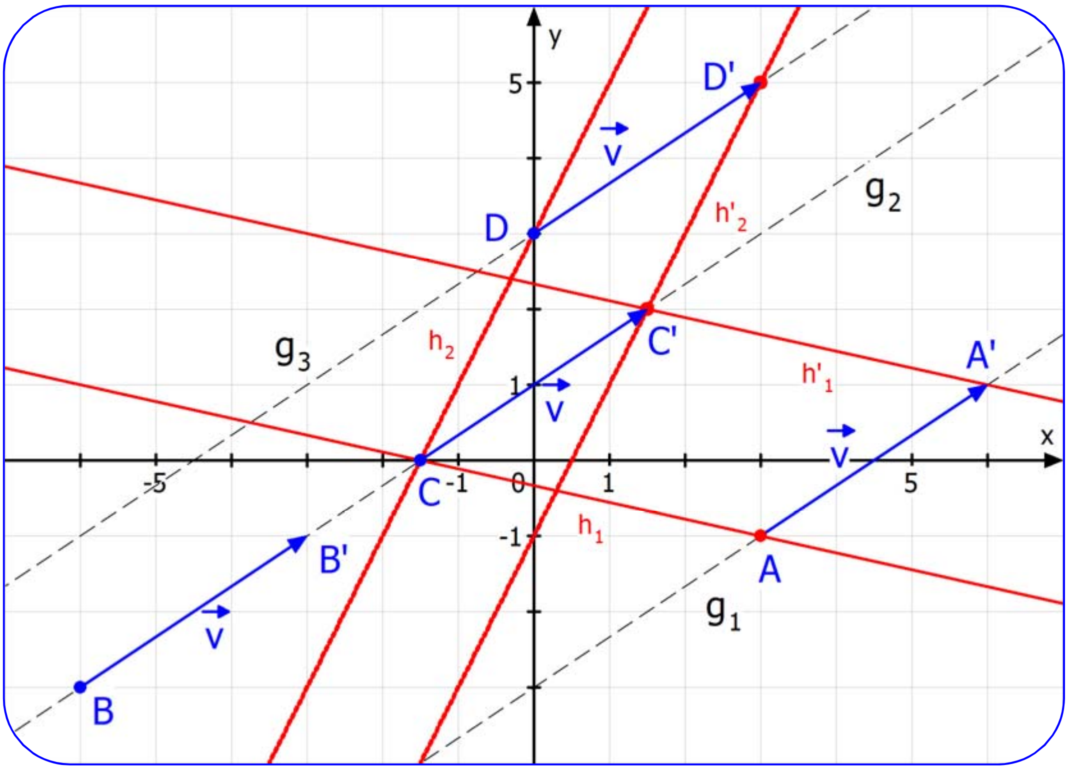


6.4 Affine Abbildungen ohne Fixpunkt.

1. Fall: Es gibt nur den Eigenwert 1 und jeder Vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$ ist Eigenvektor.

Beispiel 26: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder so geschrieben: $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Verschiebung:**

Hier werden alle Punkte durch den gleichen Vektor verschoben. Daher ist jede Gerade mit diesem Verschiebungsvektor eine Fixgerade. Jede Gerade und ihr Bild sind parallel.



Die Fixgerade g_1 enthält A und A'. Die Fixgerade g_2 enthält B und B', C und C'.

Die Fixgerade g_3 enthält D und D'.

Die Gerade $h_1 = (AC)$ wird abgebildet auf $h_1' = (A'C')$. h_1 und h_1' sind zueinander parallel.

Die Gerade $h_2 = (DC)$ wird abgebildet auf $h_2' = (D'C')$. h_2 und h_2' sind zueinander parallel.

2. Fall: Es gibt nur den Eigenwert 1 und nur einen linear unabhängigen Eigenvektor.

Methode zur Bestimmung von Fixgeraden:

Bei einer Fixgeraden muss der Bildpunkt von jedem Punkt P dieser Geraden auch wieder auf dieser Geraden liegen. Und dann muss gelten: $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \vec{u}$

Und das heißt: $\vec{x}' - \vec{x} = t \cdot \vec{u}$.

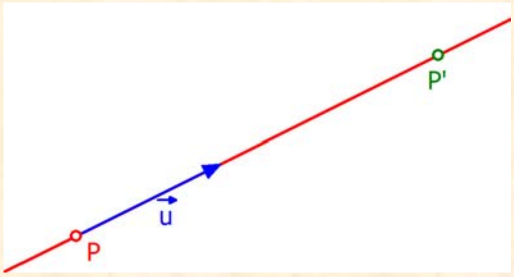
Jetzt ersetzt man $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ und erhält:

$$A \cdot \vec{x} + \vec{c} - \vec{x} = t \cdot \vec{u}. \qquad (1)$$

Dies kann man so umformen:

$$A \cdot \vec{x} - E \cdot \vec{x} + \vec{c} = t \cdot \vec{u} \quad \text{bzw.} \quad (A - E) \cdot \vec{u} + \vec{c} = t \cdot \vec{u} \qquad (2)$$

Aus (1) oder (2) folgt durch Elimination von t die Gleichung der Fixgerade.



Beispiel 27:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ (Abbildung ohne Namen)

Fixpunkte $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = y \\ y = 2x - y + 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = y \\ 0 = 2x - 2y + 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 0 = 2x - 2x + 3 \Leftrightarrow 0 = 3$

Widerspruch!

Diese Abbildung hat <u>keine Fixpunkte.</u>

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(-1-k) - 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Eigenvektoren zu k = 1: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 = u_2$

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenvektoren zu k = -2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = -2u_1$

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -2\vec{u}_2$.

Es folgt nun die Bestimmung der Fixgeraden mit der oben genannten Methode.

Bestimmung der Fixgeraden:

Bedingung für die Fixgerade: $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \vec{u}$

$\vec{x}' - \vec{x} = t \cdot \vec{u}$

Für $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} y - x = t \\ 2x - y + 3 - y = t \end{Bmatrix}$

Gleichsetzen: $y - x = 2x - 2y + 3$

Fixgerade: $3y = 3x + 3$ d. h. $\boxed{y = x + 1}$

Für $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt der Widerspruch $3 = 0$.

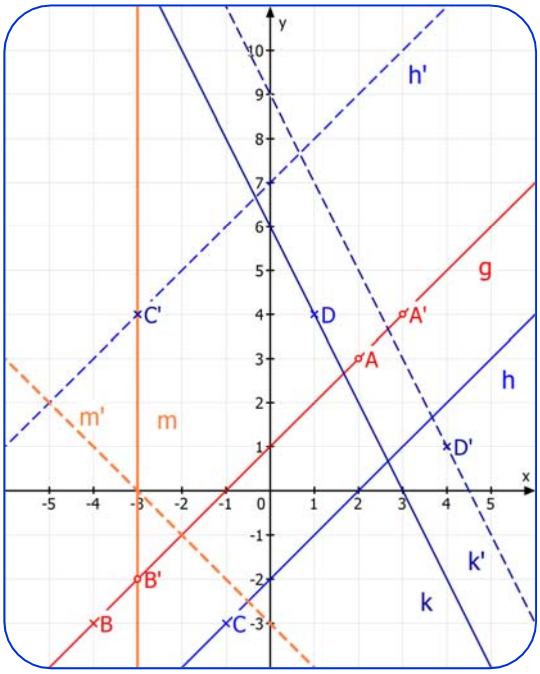
Also gibt es zu diesem Eigenvektor keine weitere Fixgerade.

(1) Die **Fixgerade** ist g: $y = x + 1$.

Auf g liegen $A(2|3)$ und $A'(3|4)$ sowie $B(-4|-3)$ und $B'(-3|-2)$.

Auf g gilt: $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für alle $P \in g$!!!

α induziert somit auf ihrer Fixgeraden eine Verschiebung durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



(2) Alle **Parallelen zur Fixgeraden** haben als Bild wieder eine Parallele zur Fixgeraden, denn ihr Richtungsvektor ist Eigenvektor in Fixrichtung.
Die Graphik enthält die Gerade h ($y = 2x - 2$) mit dem Punkt $C(-1|-3)$, die samt ihrer Bildgeraden h' parallel zu g ist. Man kann als Übung die Koordinaten von C' und die Gleichung von h' berechnen.

(3) Alle **Geraden in Richtung des zweiten Eigenvektors** $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ haben eine Fixrichtung.

Daher sind ihre Bildgeraden parallel dazu. In der Graphik ist k ($y = -2x + 6$) mit dem Punkt $D(1|4)$ dargestellt. Und ebenso die Bildgerade k' mit dem Bildpunkt D'.

(4) Wenn eine **Gerade nicht in einer Fixrichtung** verläuft wie m $(x = -3)$, dann ist ihre Bildgerade schräg dazu: m': $y = -x - 3$.

Aufgabe 10: Bestimmung von Fixgeraden

Beispiel 28 $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ **Parallelstreckung**

Berechne Fixpunkte und Fixgeraden.

Berechne das Bild von $P_1(2\,|\,2)$ und der Geraden g: $y = -4{,}5x + 11$.

Trage alle Ergebnisse in ein Achsenkreuz ein (x-Achse von – 5 bis 5, y-Achse von -6 bis 12)

Zeichne die Bildgerade von h: $y = -\frac{9}{2}x + 11$ ein, ohne zu ihre Gleichung zu berechnen.

Beispiel 29 $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Scherstreckung**

Berechne Fixpunkte und Fixgeraden.

Berechne die Bildgeraden zu h: $y = -2x + 1$, zu k: $y = 2x - 1$ und zu m: $y = -2$.

Trage Fixgerade und die 6 Geraden in ein Achsenkreuz $(-3 \le x \le 7;\ -6 \le y \le 7)$ ein.

Beispiel 30: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **Euler-Affinität**

Beispiel 31: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Ohne Name

Beispiel 32: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Parallelstreckung**

Beispiel 33: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Scherung**

Beispiel 34: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$ **Schrägspiegelung**

Beispiel 35: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ **Euler-Affinität**

Beispiel 36: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ **Scherung**

Lösung Beispiel 28

$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ **Parallelstreckung**

1. Schritt: Fixpunkte

Die Fixpunktbedingung $\vec{x}' = \vec{x}$ ergibt: $\begin{Bmatrix} x = -x - y + 3 \\ y = -4x - y + 6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(2) ist das Doppelte von (1) und daher keine neue Bedingung und entbehrlich.

Daher ist (1) die Fixpunktgerade von α: $y = -2x + 3$

2. Schritt: Berechnung der Eigenwerte: EWS $\begin{pmatrix} -1-k & -1 \\ -4 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -1-k & -1 \\ -4 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-k)^2 - 4 = 0$

Eigenwerte: $k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

3. Schritt: Eigenvektoren zu k = 1:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -4 & -1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2u_1 - u_2 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

Gleichung (4) ist entbehrlich. Aus (3) folgt: $u_2 = -2u_1$. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenvektoren zu k = -3:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1+3 & -1 \\ -4 & -1+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 - u_2 = 0 \\ -4u_1 + 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$

Gleichung (6) ist das (-2)-fache von (5) und daher entbehrlich.

Aus (5) folgt: $u_2 = 2u_1$. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -3\vec{u}_2$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: **y = -2x + 3**.
2. Weitere Fixgeraden sind alle Geraden in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $y = 2x + n, \; n \in \mathbb{R}$.

Zur Zeichnung:

Die Gerade g: $y = -4{,}5x + 11$ d. h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf

die Gerade g': $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\left[r\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{7}x + \frac{27}{7}$

Eingezeichnet sind die Achse a: $y = -2x + 3$ und 11 Fixgeraden der Schar $y = 2x + n,\ n \in \mathbb{R}$,

$P_1(2\,|\,2)$ und sein Bildpunkt $P_1'(-1\,|\,-4)$ liegen auf der Fixgeraden g_1.

Diese Fixgerade schneidet die Achse a im Fixpunkt $F_4\left(\frac{5}{4}\,|\,\frac{1}{2}\right)$.

Beobachtung: Hier wird die Eigenschaft der 2. Eigenvektors erkennbar: Der Vektor

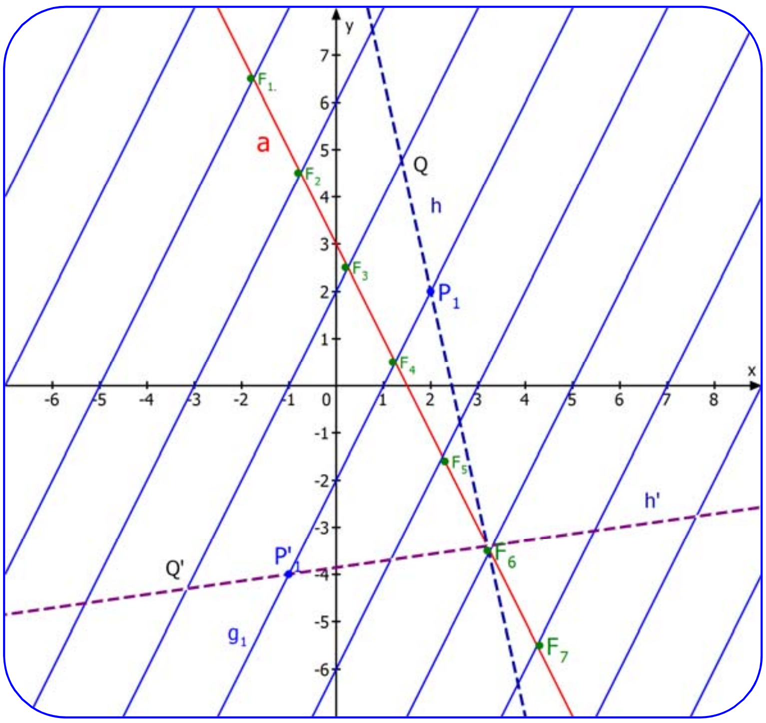
$\overrightarrow{F_1P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf $\overrightarrow{F_1P_1}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \\ -3 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = -3 \cdot \overrightarrow{F_1P_1}$

Was sagt uns das? Der Vektor $\overrightarrow{F_1P_1}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}_2$, also ein Eigenvektor. Und weil dieser den Eigenwert -3 hat, gilt: $\overrightarrow{F_1P_1}' = -3 \cdot \overrightarrow{F_1P_1}$, was wir also nicht hätten ausrechnen müssen.

Man erkennt auch, wie unsere Abbildung arbeitet: P_1 liegt auf g_1, wird dann am Fixpunkt F_1 gespiegelt und der so entstehende Abstand verdreifacht. **Man kann so also schnell jeden Bildpunkt konstruieren**. Dabei hilft noch folgende Überlegung: Die Gerade h : $\mathbf{y = -\frac{9}{2}x + 11}$ geht durch P_1 und schneidet die Affinitätsachse a: y =-2x+3 im Fixpunkt $F_6(3{,}2\,|\,-3{,}5)$. Da P_1 nach P_1‘ abgebildet wird, kennt man das Bild h' von h: h' geht durch P_1' und F_6.

Man kann auch sofort jeden Punkt Q von h abbilden. Man zeichnet einfach die Fixgerade durch Q ein, Diese ist parallel zu P_1P_1‘ und schneidet h' im gesuchten Bildpunkt Q'.

Diese Überlegungen werden nochmals sehr ausführlich im Text 62220 (Achsenaffinitäten) dargelegt.



Lösung Beispiel 29

$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***Abbildung ohne Namen***

Hinweis: *Diese Abbildung unterscheidet sich von der in Aufgabe a) nur im Verschiebungsvektor. Die Abbildungsmatrix ist dieselbe, weshalb wir die Eigenvektoren aus a) übernehmen.*

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -x-y+3 \\ y = -4x-y+1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + y = 3 \\ 4x+2y = 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Die Rechnung $(2) - 2\cdot(1)$ führt auf: $0 = -5$. Dies ist ein Widerspruch gegen die Annahme, es gäbe Fixpunkte. Die Abbildung α hat also <u>keine Fixpunkte</u>.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -1-k & -1 \\ -4 & -1-k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -1-k & -1 \\ -4 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-k)^2 - 4 = 0$

Eigenwerte: $k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Eigenvektoren zu k = 1: $\begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -4 & -1-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -2u_1 - u_2 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (2) ist keine neue Bedingung. Aus (1) folgt: $u_2 = -2u_1$.

Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$. Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$

Eigenvektoren zu k = -3: Analog folgt: Alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -3\vec{u}_2$.

Fixgeraden:

Bedingung für die Fixgerade: $\overrightarrow{PP'} = t\cdot\vec{u}_1$ d. h. $\vec{x}' - \vec{x} = t\cdot\vec{u}_1$

1. Fall: Für $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{-2t} \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} -x-y+3-x = t \\ -4x-y+1-y = -2t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x - y + 3 = t \\ -4x-2y+1 = -2t \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

Durch $(4) + 2\cdot(3)$ erhält man $-8x - 4y + 7 = 0 \Leftrightarrow 4y = -8x + 7 \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + \tfrac{7}{4}}$

Das ist die erste Fixgerade von α.

2. Fall Für $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ folgt: aus $\vec{x}' - \vec{x} = t\cdot\vec{u}_2$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{2t} \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} -x-y+3-x = t \\ -4x-y+1-y = 2t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x - y + 3 = t \\ -4x-2y+1 = 2t \end{Bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$

Durch $(6) - 2\cdot(5)$ erhält man $0x + 0y - 5 = 0$

Dies ist ein Widerspruch (gegen die Annahme, zu u_2 gäbe es auch eine Fixgerade

Ergebnis: **Die Abbildung α hat keinen Fixpunkt und nur eine Fixgerade.**

Details dazu mit einer Zeichnung:

(1) Zuerst wähle ich zwei Punkte der **Fixgeraden** g: $y = -2x + \frac{7}{4}$:

$A\left(0 \mid \frac{7}{4}\right)$ Bildpunkt von A: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{5}{4} \mid -\frac{3}{4}\right)$

$B\left(-2 \mid \frac{23}{4}\right)$. Bildpunkt von B: $\vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{23}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow B'\left(-\frac{3}{4} \mid \frac{13}{4}\right)$

Beide Bildpunkte liegen auch auf g. Das kann man erstens nachrechnen, indem man sie in g einsetzt, also die Punktprobe macht, oder man weiß, dass ja g eine Fixgerade ist, so dass mit einem Punkt von g auch sein Bildpunkt Element von g ist.

Betrachtet man in der Zeichnung die Pfeile $\overrightarrow{AA'}$ und $\overrightarrow{BB'}$, so erscheinen sie gleich lang. Auf der übernächsten Seite zeige ich, dass dies für alle Punkte auf der Fixgeraden gilt. Unsere Abbildung α induziert auf der Fixgeraden eine Verschiebung um einen Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = 2\vec{u}$.

Beweis dieser Aussage: Die Fixgerade hat die Gleichung $y = -2x + \frac{7}{4}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{x}$ ist der Ortsvektor eines Punktes P auf g.

Berechnung des Bildpunktes:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1'} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1' = \vec{u}_1}$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} + 3 \\ -\frac{7}{4} + 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor $\mathbf{\vec{v} = \overrightarrow{PP'}} = \vec{x}' - \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \cancel{r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \cancel{r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{10}{4} \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Das war zu beweisen!

(2) Der Richtungsvektor von g ist ein Eigenvektor: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert 1, d. h. es gilt $\vec{u}_1' = \vec{u}$. Was passiert eigentlich mit anderen Geraden in Richtung dieses Eigenvektors, also etwa mit **der zu g Parallelen h**: $y = -2x + 1$, bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Bildgerade: h': $\vec{x}' = \alpha\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{u}_1\right] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{u}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

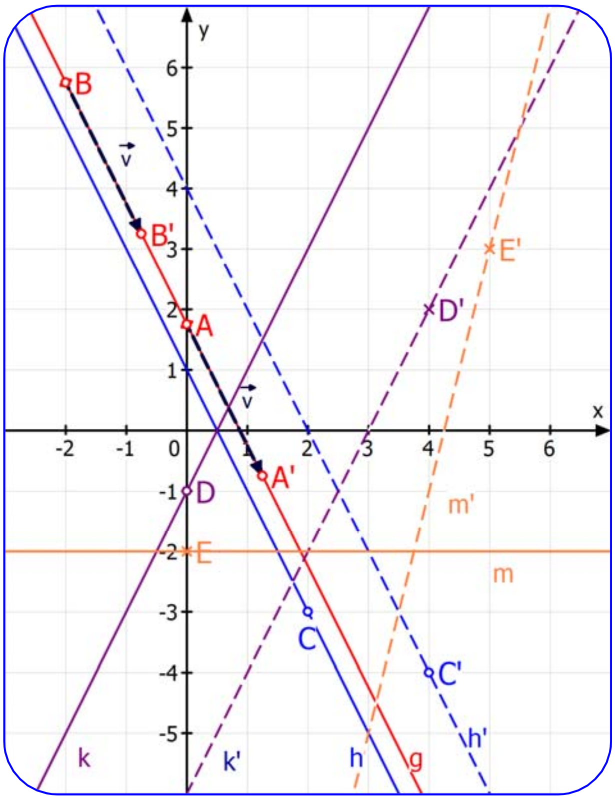
d. h. $y = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 4$

h' ist natürlich parallel zu h, da ja h eine Fixrichtung $\vec{u}_1$ hat.

Als Beispielpunkt wurde $C(2 \mid -3)$ auf h eingetragen. Sein Bildpunkt ist $C'(4 \mid -4)$ auf h'.

Die Darstellung enthält eine Gerade k **in Richtung des zweiten Eigenvektors** $\vec{u}_2$ samt Bildgerade k' (siehe (3).)

und eine Gerade m, die keinen Eigenvektor als Richtungsvektor hat samt Bildgerade m'.



(3) Jede **Gerade in Richtung des zweiten Eigenvektors** $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ hat als Bild eine Parallele.

Denn dieser Vektor wird auf $\vec{u}_2{}' = -3\vec{u}_2$ abgebildet, hat also dieselbe Richtung, eine Fixrichtung.

Als Beispiel haben ich k: $y = 2x - 1$ eingezeichnet.

Die Bildgerade ist k': $y = 2x - 6$.

Hier die Berechnung dazu: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Bildgerade: k': $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & -1\\-4 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\vec{u}_2\right] + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + r\cdot\vec{u}_2{}'$

Da $\vec{u}_2{}' = -3\cdot\vec{u}_2$ ist, kann man als Richtungsvektor auch $\vec{u}_2$ versenden (Fixrichtung).

k' hat daher die Steigung $m = \frac{2}{1} = 2$ und die Gleichung

$y - 2 = 2\cdot(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 6$

Die Zeichnung enthält den Punkt $D(0\,|\,-1) \in k$ und seinen Bildpunkt $D'(7\,|\,8) \in k'$.

(4) Interessant ist jetzt noch die Gerade m: $y = -2$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

deren Richtung **keine Fixrichtung** ist.

Als Bildgerade m' berechnet man m': $\vec{x}' = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ bzw. $y = 4x - 17$:

Als Punktbeispiel erkennt man $E(0\,|\,-2) \in m \quad \rightarrow \quad E'(5\,|\,3) \in m'$.

(5) Denkaufgabe für Fortgeschrittene:

Eine Gerade g habe als Richtungsvektor

$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und gehe durch A.

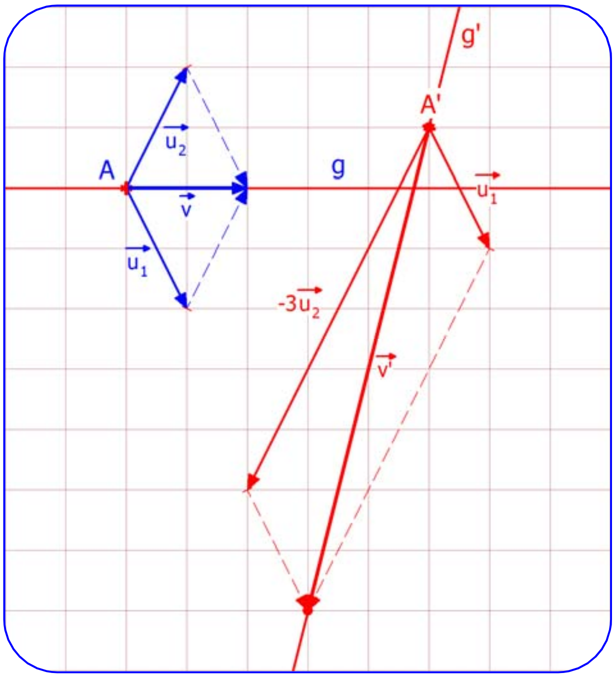
Der Bildpunkt von A sei A'.

Dann kann man den Richtungsvektor von g' so bestimmen:

$\alpha(\vec{v}) = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha(\vec{u}_1) + \alpha(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = \vec{v}\,'$

Das ist Eigenschaft der Linearität!

Das zeigt die Darstellung rechts.



Man kann das übrigens mit jedem Richtungsvektor machen:
Man stellt ihn als **Linearkombination der Eigenvektoren** dar.

Wenn man z. B. das erhält: $\boxed{\vec{v} = 4\vec{u}_1 + 5u_2 :}$

dann folgt für den Bildvektor $\boxed{\vec{v}\,' = 4\vec{u}_1\,' + 5\vec{u}_2\,'} = 4\vec{u}_1 - 15\vec{u}_2$,

denn für die Eigenvektoren galt: $\vec{u}_1\,' = \vec{u}_1$ und $\vec{u}_2 = -3\vec{u}_2$.

Und schon kann man $\vec{v}\,'$ zeichnen und berechnen.
(Eine sehr wichtige Übungsaufgabe, die ein wenig das Geheimnis um diese Abbildung lüftet.)

Lösung Beispiel 30

$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **Euler-Affinität**

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 3x + 3y - 1 \\ y = 2x - 2y - 7 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Aus (1) + (2) erhält man $4x = 8 \Rightarrow x_F = 2$

Aus (1) – (2) folgt dazu $6y = -6 \Rightarrow y_F = -1$

α hat einen Fixpunkt: $F(2\,|\,-1)$.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 3-k & 3 \\ 2 & -2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 3-k & 3 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-k)(-2-k) - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 12 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 4$: $\begin{pmatrix} 3-\boxed{4} & 3 \\ 2 & -2-\boxed{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 - 6u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

Gleichung (4) ist entbehrlich. Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 3r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \boxed{4}\,\vec{u}_1$

Eigenwertsystem zu k_1 = -3: $\begin{pmatrix} 3-\boxed{-3} & 3 \\ 2 & -2-\boxed{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6u_1 + 3u_2 = 0 \\ 2u_1 + u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$

Gleichung (1) ist entbehrlich. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -3\vec{u}_2$

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

Da α genau einen Fixpunkt und zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat, besitzt α zwei Fixgeraden:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 2x - 2{,}5$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -x - 4$

Diese Euler-Affinitäten werden ausführlich im Text 21240 behandelt.

Lösung Beispiel 31:

$$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x - 2 \\ y = 2x + 3y + 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = -2 \\ 0 = 2x + 2y + 3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (1) eine falsche Aussage ist, lässt sich das System nicht lösen.

α besitzt keine Fixpunkte.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 2 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k)(3-k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 3 \end{cases}$ Eigenwerte.

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = -u_1$.

Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenwertsystem zu $k_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 1-3 & 0 \\ 2 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2u_1 = 0 \\ 2u_1 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 = 0$

u_2 ist dann eine beliebige reelle Zahl.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = 3\vec{u}_2$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

Bedingung für die Fixgerade: $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \vec{u}_1$ d. h. $\vec{x}' - \vec{x} = t \cdot \vec{u}_1$

(I) Für $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} x - 2 - x = t \\ 2x + 3y + 3 - y = -t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 = t \\ 2x + 2y - 3 = -t \end{Bmatrix}$

Ersetzt man t in (2), folgt: $2x + 2y - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{y = -x + \frac{5}{2}}$ Das ist eine Fixgerade von α.

(II) Für $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt: aus $\vec{x}' - \vec{x} = t \cdot \vec{u}_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} x - 2 - x = 0 \\ 2x + 3y + 3 - y = t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 = 0 \\ 2x + 2y + 3 = t \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(1) ist ein Widerspruch (gegen die Annahme, zu u_2 gibt es auch eine Fixgerade).

Daher gibt es jetzt keine Lösung.

Ergebnis: Die Abbildung α hat keinen Fixpunkt und nur eine Fixgerade.

Lösung Beispiel 32

$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Parallelstreckung

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2x + 2y + 1 \\ y = 4x + 5y + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = x + 2y + 1 \\ 0 = 2x + 4y + 2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (2) das Doppelte von (1) ist, stellt (2) keine neue Bedingung dar.
Also sind alle Punkte, die (1) lösen, Fixpunkte.

α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse): $\boxed{y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 3-k & 2 \\ 4 & 5-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 3-k & 2 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-k)(5-k) - 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8k + 7 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \dfrac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu $k_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 3-\boxed{1} & 2 \\ 4 & 5-\boxed{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 4u_1 + 4u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0$

Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenwertsystem zu $k_1 = 7$: $\begin{pmatrix} 3-\boxed{7} & 2 \\ 4 & 5-\boxed{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -4u_1 + 2u_2 = 0 \\ 4u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 2u_1$

Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = 7\vec{u}_2$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: $\boxed{y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$
2. Weitere Fixgeraden sind alle Geraden in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $y = 2x + n, \ n \in \mathbb{R}$.

Lösung Beispiel 33

$\alpha: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Scherung**

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 3x + y - 1 \\ y = -4x - y + 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 2x + y - 1 \\ 0 = -4x - 2y + 2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (2) das (-2)-fache von (1) ist, stellt (2) keine neue Bedingung dar.

Also sind alle Punkte, die (1) lösen, Fixpunkte.

α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse): $\boxed{y = -2x + 1}$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ -4 & -1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -4 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-k)(-1-k) + 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$ Doppelte Lösung.

Eine affine Abbildung mit einem Fixpunkt und dem einzigen Eigenwert 1 ist eine **Scherung.**

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} 3-1 & 1 \\ -4 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1 + u_2 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(2) ist ein Vielfaches von (1), also entbehrlich. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: $\boxed{y = -2x + 1}$
2. Alle Parallelen zur Achse a.

Im Text 62140 erfährt man, dass eine Scherung stets die Achse und alle Parallelen dazu als Fixgeraden hat.

Lösung Beispiel 34

$$\alpha:\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Fixpunkte

Die Fixpunktbedingung $\vec{x}' = \vec{x}$ ergibt: $\left\{\begin{matrix} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{3}{5} = x \\ \frac{16}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{24}{5} = y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5} & (1) \\ \frac{16}{5}x - \frac{8}{5}y = \frac{24}{5} & (2) \end{matrix}\right\}$

Da Gleichung (2) das (-8)-fache von (1) ist, ist (2) überflüssig. Es bleibt also nur (1) als Bedingung für Fixpunkte. Das heißt: Alle Punkte, die die Gleichung $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{3}{5}$ erfüllen, sind Fixpunkte. Durch Umformen kommt man auf **$y = 2x - 3$**. Das ist die **Fixpunktgerade (Achse).**

2. Schritt: Berechnung der Eigenwerte: EWS $\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-k & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist die <u>charakteristische Gleichung</u>:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}-k & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{3}{5}-k\right)\left(-\tfrac{3}{5}-k\right) - \tfrac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow k^2 - \tfrac{9}{25} - \tfrac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1$$

Eigenwerte sind also $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$

3. Schritt: Eigenvektoren zu k = 1:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\mathbf{1} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -\frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5}u_2 = 0 \\ \frac{16}{5}u_1 - \frac{8}{5}u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $-2u_1 + u_2 = 0$

Jetzt wähle ich $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2u_1 = 2r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$.

Eigenvektoren zu k = -1:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\mathbf{1} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}+\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{8}{5}u_1 + \frac{1}{5}u_2 = 0 & (3) \\ \frac{16}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2 = 0 & (4) \end{matrix}\right\}$$

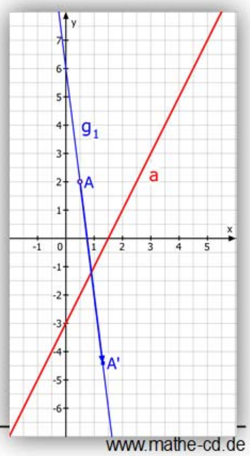
Die Gleichung (4) ist das Doppelte von (3) und daher keine neue Bedingung.
Also bestimmt man u_1 und u_2 nur aus (3), die man so umformt: $8u_1 + u_2 = 0$

Jetzt wähle ich $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -8u_1 = -8s$.

Eigenvektoren sind $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -8r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$

Ergebnis: Die Abbildung hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$

und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = -\vec{u}_2$.



4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: **$y = 2x - 3$**.
2. Weitere Fixgeraden sind alle Geraden in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$: $y = -8x + n,\ n \in \mathbb{R}$.

Ergebnis: α ist eine Schrägspiegelung an a.

Lösung Beispiel 35

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x-4y+5=x \\ 4x-4y+4=y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5x-4y=-5 & (1) \\ 4x-5y=-4 & (2) \end{Bmatrix}$

$4\cdot(1)$: $20x-16y=-20$ (3)

$5\cdot(2)$: $20x-25y=-20$ (4)

(3) - (4): $9y=0 \Rightarrow y=0$ In (1): $5x=-5 \Rightarrow x=-1$.

Einziger Fixpunkt ist also $F(-1\,|\,0)$.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-k)(-4-k)+16=0$

$k^2-2k-8=0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Eigenvektoren zu $k_1 = 4$: $\begin{pmatrix} 6-4 & -4 \\ 4 & -4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2u_1-4u_2=0 \\ 4u_1-8u_2=0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(2) stellt keine neue Bedingung dar. Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit $\vec{u}_1' = 4\vec{u}_1$.

Eigenvektoren zu k_1 = -2: $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 8u_1-4u_2=0 \\ 4u_1-2u_2=0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

(1) stellt keine neue Bedingung dar. Wähle $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$

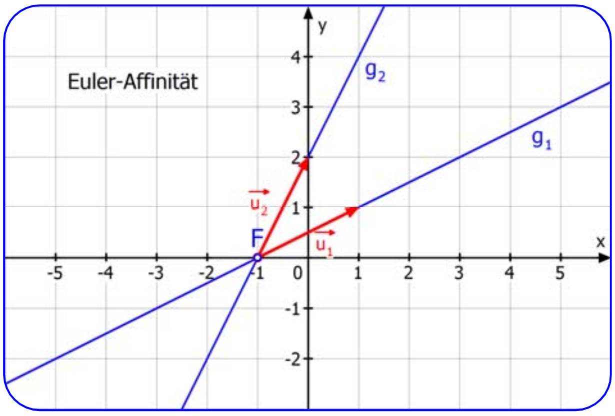
Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, mit $\vec{u}_1' = -2\vec{u}_1$

Ergebnis: Die Abbildung ist eine **Euler-Affinität**

Fixgeraden sind die beiden Geraden durch F in Richtung der Eigenvektoren:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $y = 2x+2$



Lösung Beispiel 36

$$\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $\vec{x} = \vec{x} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} x = x \\ y = 2x + y - 2 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} 0 = 0 \\ x = 1 \end{Bmatrix}$

Die Gerade **x = 1** ist Fixpunktgerade.

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-k)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 1$ Eigenwert.

Es handelt sich also um eine **Scherung** an der Achse **x = 1**.

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; 2u_1 = 0$

Also ist $u_1 = 0$ und $u_2 = r \in \mathbb{R}$ beliebig.

Eigenvektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

Es handelt sich um eine **Scherung** an der Achse **x = 1**.

Oder: Bestimmung der Abbildungsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = x\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = (2x-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn also $x \neq 1$ ist, also $P \notin a$, dann ist $\overrightarrow{PP'} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fixgeraden sind die Achse und alle Parallelen dazu: $x = c,\; c \in \mathbb{R}$.

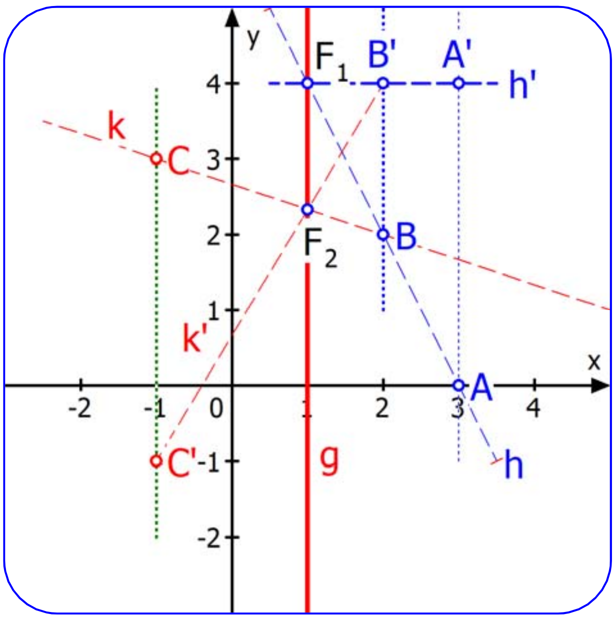
Zur Zeichnung: $A(3|0) \to \vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A'(3|4)$

Konstruktion von B'**:** Die Gerade h = (AB) schneidet die Achse g in F_1. Die Bildgerade h' geht dann durch F_1 und A'. B liegt auf h, also liegt B' auf h'.

Abgebildet wird bei einer Scherung parallel zur Achse, das ist die Affinitätsrichtung (blaue gepunktete Linie).

Konstruktion von C' analog:

$C \in k = (BK) \;\Rightarrow\; C' \in k'$ usw.



7 Abbildungsgleichungen erstellen

Für diese Aufgabenstellung empfehle ich, die Abbildungsgleichung in der vektoriellen Form zu verwenden: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$ oder $\vec{x}' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{c}$

Die Form mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist meist günstiger, denn sehr oft sind die Punkte A, B, C gegeben, und dann können $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren dieser Punkte bedeuten, was zu Verwechslungen mit den Basisvektoren der affine Abbildung führen kann.

Beispiel 1

Gegeben ist das Dreieck $A(1|1), B(2|-1), C(-1|0)$ mit den Bildpunkten $A'(3|1), B'(2|-3), C'(0|-1)$. Stelle die Abbildungsgleichung auf.

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A' einsetzen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + \vec{w}$ (1)

B, B' einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{v} + \vec{w}$ (2)

C, C' einsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + \vec{w}$ (3)

(1) – (3): $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v}$ (4)

(2) – (3): $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\vec{u} - \vec{v}$ (5)

(4) + (5): $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

In (4): $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

In (3): $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiel 2

Eine affine Abbildung bildet $A(3\,|\,1)$ auf $A'(19\,|\,20)$ und $B(-2\,|\,0)$ auf $B'(-7\,|\,-4)$ ab.
Sie hat den Fixpunkt $F(-1\,|\,0)$. Welche Abbildungsgleichung besitzt sie?

Ansatz: $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} + \vec{w}$

A, A' einsetzen: $\begin{pmatrix}19\\20\end{pmatrix} = 3\cdot\vec{u} + 1\cdot\vec{v} + \vec{w}$ (1)

B, B' einsetzen: $\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix} = -2\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v} + \vec{w}$ (2)

C, C' einsetzen: $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v} + \vec{w}$ (3)

(3) – (2) ergibt: $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \vec{u}$

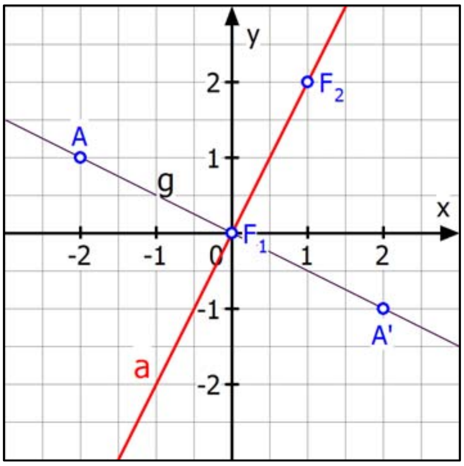
Eingesetzt in (3): $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + \vec{w} \quad\Rightarrow\quad \vec{w} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

Eingesetzt in (1): $\begin{pmatrix}19\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\12\end{pmatrix} + \vec{v} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}\,' = x\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}6 & -4\\4 & 4\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

Beispiel 3

Bestimme die Gleichung einer Orthogonalspiegelung an der Geraden y = 2x



Da die Spiegelungsachse aus Fixpunkten besteht, entnimmt man zwei davon, also $F_1(0\,|\,0)$ und $F_2(1\,|\,2)$.
Die Spiegelungsrichtung ist senkrecht zur Achse. Also ist beispielsweise die Gerade $y = -\frac{1}{2}x$ eine Fixgerade.

Der auf ihr liegende Punkt $A(-2\,|\,1)$ wird durch die Spiegelung an a auf $A'(2\,|\,-1)$ abgebildet.

Ansatz: $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} + \vec{w}$

F_1 einsetzen: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec{w}$ (1)

F_2 einsetzen: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \vec{u} + 2\vec{v} + \cancel{\vec{w}}$ (2)

A, A' einsetzen: $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = -2\cdot\vec{u} + \vec{v} \cancel{+\vec{w}}$ (3)

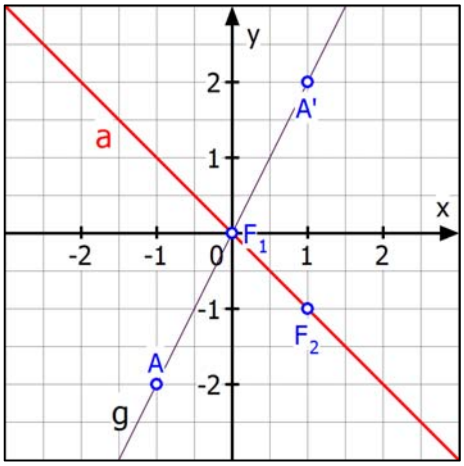
$2\cdot(2)+(3)$: $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{u} + 5\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ in (2): $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\vec{x}$

Hinweis: Wenn der Ursprung Fixpunkt ist, kann man sofort den vereinfachten Ansatz machen: $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$, was ein wenig Schreibarbeit spart.

Beispiel 4 **Schrägspiegelung an der Geraden $y = -x$ in Richtung $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.**

Ansatz: $\vec{x}' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$, denn $F_1(0\,|\,0)$ ist Fixpunkt.



Fixpunkt $F_2(1|-1)$: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \vec{u} - \vec{v}$ (1)

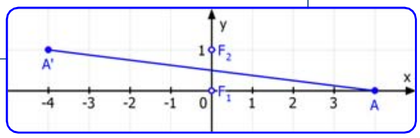
$A(-1|-2), A'(1|2)$: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -1\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v}$ (2)

(2) + (1): $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -3\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

In (1) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\-\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\vec{x}$

Beispiel 5: Erstelle die Abbildungsgleichung für eine Schrägspiegelung an der y-Achse, die den Punkt $A(4\,|\,0)$ in $A'(-4\,|\,1)$ abbildet.



Lösung:

1. Möglichkeit: Rechnen mit der Vektorgleichung:

Der Ansatz für eine affine Abbildung ist dann: $\vec{x}' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$ (1)

Es werden drei Paare Punkt/Bildpunkt benötigt, um $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu bestimmen.

1. Bedingung: Der Ursprung ist Fixpunkt $F_1(0\,|\,0)$: $\vec{o} = 0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + \vec{c}$

Folgerung. **Ist der Ursprung ein Fixpunkt, dann ist $\vec{c} = \vec{o}$**

2. Bedingung: Die y-Achse ist Fixpunktgerade. Dann ist z. B. $F_2(0\,|\,1)$ ein zweiter

Fixpunkt: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Folgerung: **Ist die y-Achse Fixpunktgerade, dann lautet die Abbildungsgleichung:**

$$\vec{x}' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (2)$$

3. Bedingung: $A(4\,|\,0) \to A'(-4\,|\,1)$. Einsetzen in (2):

Folgerung: $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = 4\cdot\vec{a} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x\cdot\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\\frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$

2. Möglichkeit: Rechnen mit der Matrizengleichung:

Der Ansatz für eine affine Abbildung ist dann: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ (3)

1. Bedingung: Der Ursprung ist Fixpunkt $F_1(0\,|\,0)$: $\vec{o} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \vec{o}$

Folgerung. **Ist der Ursprung ein Fixpunkt, dann ist $\vec{c} = \vec{o}$**

2. Bedingung: Die y-Achse ist Fixpunktgerade. Dann ist z. B. $F_2(0\,|\,1)$ ein zweiter

Fixpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

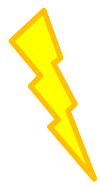
Folgerung: **Ist die y-Achse Fixpunktgerade, dann lautet die Abbildungsgleichung:**

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad (4)$$

3. Bedingung: $A(4\,|\,0) \to A'(-4\,|\,1)$. Einsetzen in (4):

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 \\ 4a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ergebnis: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Beispiel 6 *Eine Rechnung kann auch schief gehen!* ***WARNUNG!***



Gegeben sind die folgende Paare Punkt / Bildpunkt:

$A(-2\,|\,1) \to A'(-2\,|\,2)$, $B(0\,|\,2) \to B'(-1\,|\,2)$. $C(5\,|\,\frac{9}{2}) \to C'(\frac{3}{2}\,|\,2)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A': $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (1)

B, B': $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\vec{v}$ (2)

C, C': $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = 5\vec{u} + \frac{9}{2}\vec{v} + \vec{w}$ (3)

(2) in (1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\vec{u} + \vec{v} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\vec{u} - \vec{v}$ (4)

(2) in (3): $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = 5\vec{u} + \frac{9}{2}\vec{v} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} \quad |\cdot \frac{2}{5}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v}$ (5)

Nun passiert etwas Unerwartetes: Gleichung (5) ist entbehrlich, denn sie entsteht aus (4) durch Multiplikation mit -1. Also fehlt eine Gleichung, man kann $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht eindeutig berechnen. Die Ursache dafür liegt darin, dass die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen. Man sollte sich also merken, dass man zur Bestimmung der Abbildungsgleichung unbedingt **drei Punkte benötigt, die nicht auf einer Geraden liegen, sondern ein Dreieck bilden.**

Aufgabe 11

Stelle die Gleichung der affinen Abbildungen auf.

a) $A(1|-1) \rightarrow A'(1|1)$, $B(3|-2) \rightarrow B'(5|2)$, $C(-1|2) \rightarrow C'(-3|2)$.

b) $Z(2|1)$ ist Fixpunkt und $A(4|2) \rightarrow A'(8|4)$, $B(1|1) \rightarrow B'(-1|1)$

c) $F(4|-1)$ ist Fixpunkt und $A(0|0) \rightarrow A'(-3|2)$, $B(2|1) \rightarrow B'(3|3)$

d) Der Ursprung und $A(1|0)$ sind Fixpunkte, $B(2|3) \rightarrow B'(5|3)$

e) Spiegelung an der Achse x = -1

f) Spiegelung an der Geraden y = -x

g) Schrägspiegelung an $y = -\frac{1}{2}x$, so dass die x-Achse Fixgerade ist.

h) Scherung an der y-Achse, so dass $A(4|-2) \rightarrow A'(4|2)$.

Lösung Nr. 11a

a) $A(1|-1) \to A'(1|1)$, $B(3|-2) \to B'(5|2)$, $C(-1|2) \to C'(-3|2)$.

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A' :	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$	(1)
B, B' :	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$	(2)
C, C' :	$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$	(3)
(2) – (1):	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{u} - \vec{v}$	(4)
(3) – (1):	$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$	(5)
(4) + (5):	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.	
In (4):	$2\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	
In (1):	$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	

Kontrolle:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung Nr. 11b

$Z(2|1)$ ist Fixpunkt und $A(4|2) \to A'(8|4)$, $B(1|1) \to B'(-1|1)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A' :	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$	(1)
B, B' :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$	(2)
$Z' = Z$:	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$	(3)
(1) – (2):	$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{u} + \vec{v}$	(4)
(1) – (3):	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v}$	(5)
(4) – (5):	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

7Lösung Nr. 11c

$F(4|-1)$ ist Fixpunkt und $A(0|0) \to A'(-3|2)$, $B(2|1) \to B'(3|3)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A': $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

B, B': $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ (1)

F' = F: $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = 4\vec{u} - \vec{v} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 4\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ (2)

(1) + (2): $6\vec{u} = \begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}\frac{13}{6}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

In (1): $\vec{v} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\frac{13}{6}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{13}{6} & \frac{5}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{13}{6} & \frac{5}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix}\frac{13}{6}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\frac{13}{6} & \frac{5}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Lösung Nr. 11d

Der Ursprung und $A(1|0)$ sind Fixpunkte, $B(2|3) \to B'(5|3)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ denn weil O Fixpunkt ist: $\vec{w} = \vec{o}$

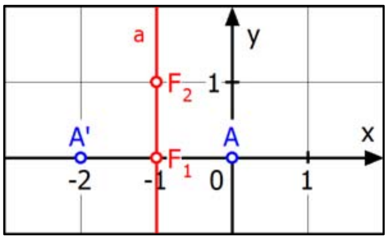
A = A': $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{u} + 0\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

B, B': $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad \Rightarrow \quad 3\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (1)

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$

Lösung Nr. 11e

Spiegelung an der Achse x = -1



Erkennen: $F_1(-1|0)$ und $F_2(-1|1)$ sind Fixpunkte,
und $A(0|0) \to A'(-2|0)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A': $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

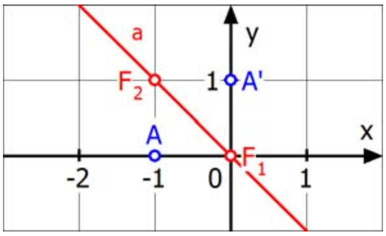
$F_1' = F_1$: $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\vec{u} + 0\vec{v} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$F_2' = F_2$: $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -\vec{u} + \vec{v} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Lösung Nr. 11f

Spiegelung an der Geraden y = -x



Erkennen: $F_1(0|0)$ und $F_2(-1|1)$ sind Fixpunkte,
und $A(-1|0) \to A'(0|1)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ weil O Fixpunkt ist.

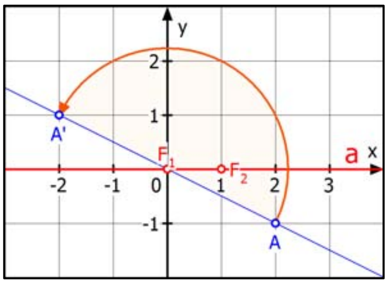
$F_2' = F_2$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{u} + \vec{v}$

A, A' : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

Lösung Nr. 11g

Schrägspiegelung an der x-Achse, so dass $y = -\frac{1}{2}x$ Fixgerade ist.



Erkennen: $F_1(0|0)$ und $F_2(1|0)$ sind Fixpunkte,
und $A(2|-1) \to A'(-2|1)$ (In Affinitätsrichtung den Abstand übertragen (Kreisbogen!)

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ weil O Fixpunkt ist.

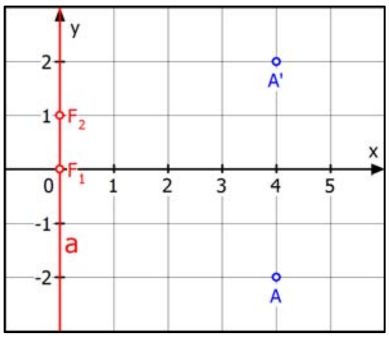
$F_2' = F_2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}$

A, A' : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

Lösung Nr. 11h

Scherung an der y-Achse, so dass $A(4|-2) \to A'(4|2)$.



Erkennen: $F_1(0|0)$ und $F_2(0|1)$ sind Fixpunkte,
und $A(4|-2) \to A'(4|2)$

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ weil O Fixpunkt ist.

$F_2' = F_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}$

A, A' : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow 4\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$